LAS BASES DE LA MATEMÁTICA

HILBERT

En el principio fue el axioma



NATIONAL GEOGRAPHIC

DAVID HILBERT quiso conducir a las matemáticas del caos metodológico que las caracterizaba a finales del siglo XIX a un orden basado en el axioma que las fundamentara sólida y completamente. Este monumental proyecto acabó fracasando, pero el proceso en sí cambió por siempre la faz de la disciplina. En su búsqueda de unas matemáticas «ideales», sin contradicciones, las exploró casi por entero, e incluso se adentró en la física, para dotar a la mecánica cuántica de la estructura que lleva su nombre: el espacio de Hilbert. Figura de enorme carisma entre sus colegas, sus famosos veintitrés problemas abiertos, presentados en 1900, marcaron el paso de la disciplina durante décadas. Hizo de la alemana Gotinga la capital mundial de las matemáticas, pero tuvo que verla asolada por las purgas nazis. Su famosa frase «Debemos saber, sabremos», grabada en su tumba, refleja el ansia de conocimiento del último gran matemático universal.

LAS BASES DE LA MATEMÁTICA

HILBERT

En el principio fue el axioma

NATIONAL GEOGRAPHIC

CARLOS M. MADRID CASADO es profesor de Estadística
en la Universidad Complutense de Madrid e investigador
asociado de la Fundación Gustavo Bueno para temas
de filosofía e historia de las ciencias.

Realización: EDITEC

Diseño cubierta: Llorenç Martí

Diseño interior: Luz de la Mora

Infografías: Joan Pejoan

Fotografías: Archivo RBA: 30, 39ai, 39ad, 55a, 55bi, 66, 85, 125, 139bi, 165bd, 166; George M. Bergman, Berkeley: 159; Biblioteca Bancroft/Universidad de Berkeley: 165bi; Biblioteca de la Universidad de Chicago: 97a; Biblioteca del Congreso de Estados Unidos: 39b; John Callas: 161; J. Colomb-Gérard: 91; Departamento de Matemáticas Stony Brook, Nueva York: 101d; Siegfried Detlev Bendixen: 23; Konrad Jacobs: 55bd, 139a; Kassandro: 165a; Robert Krewaldt/Biblioteca del Congreso de Estados Unidos: 41; Laboratorio Nacional de Los Álamos: 97bd; Museo Boerhaave, Leiden: 97bi; Soylent Communications: 101i; Universidad de St Andrews, Escocia: 117, 139bd; Justus van Gent: 25.

ISBN: 978-84-473-7679-7
Depósito legal: B-13291-2016

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Introducción

Adelante, entremos en una biblioteca cualquiera y echemos un somero vistazo a los libros que guarda. Comprobaremos sin dificultad que las obras de Euclides, Newton o Einstein figuran en los anaqueles al lado de las obras de Platón, Aristóteles o Kant, por no mencionar las de Cervantes o Shakespeare. Lo verdadero junto a lo bueno y lo bello. Pero, alto ahí, un momento, ¿por qué esta disposición? ¿Acaso se debe a la mano de algún descuidado bibliotecario o, más bien, dando de lado al azar, hay alguna razón de fondo? Quizá debamos comenzar preguntándonos por qué las obras de Euclides, y quien dice Euclides otro tanto podría decir de Arquímedes, Leibniz, Euler o Gauss, siguen inmersas en nuestro presente, siguen vigentes. No en vano, durante siglos los *Elementos de geometría* de Euclides han constituido el manual con que múltiples generaciones de estudiantes se han iniciado en las verdades de la ciencia. ¿Cuál ha sido el papel de la geometría y, en general, de la matemática en el conjunto del saber? Para unos, la matemática fue el pórtico y la llave de la ciencia; para otros, además, el alfabeto de la filosofía.

Sin embargo, la pregunta por el fundamento y la naturaleza de las matemáticas ha tenido demasiadas respuestas. Casi tantas como matemáticos en el mundo han sido, desde los agrimensores a la sombra de las pirámides hasta los matemáticos actuales, pasando por los geómetras griegos. Ahora bien, desde la noche

de los tiempos, quien dice matemáticas dice demostración. La demostración es el pegamento que mantiene unidas las matemáticas. Pero, ¿qué es una demostración? Este es uno de los interrogantes a los que nuestro protagonista, David Hilbert (1862-1943), dedicó buena parte de su vida científica. ¿En qué consiste la demostración de un teorema matemático? Más aún: ¿son demostrables todas las verdades matemáticas? Estos y otros misterios, en la frontera entre la ciencia y la filosofía, rodean las bases de la matemática. Una honda preocupación que consumió gran parte del amor de Hilbert por esta ciencia.

David Hilbert es probablemente uno de los matemáticos más importantes que ha conocido el siglo XX. Su obra en álgebra, geometría, análisis, física, lógica y fundamentos de la matemática le ha valido el calificativo de «Matemático del siglo». Este sobrenombre tiene, naturalmente, su justificación. Su trabajo —tanto en calidad como en cantidad— posee un valor incalculable y apenas tiene precedentes en la historia de las matemáticas. Está a la altura de Gauss o Poincaré. Pero, ¿se habría convertido en un mito si no hubiera sido Hilbert? A las continuas innovaciones y los espectaculares resultados a que acostumbró a sus contemporáneos se tiene que añadir un carisma personal que cautivó y fascinó a los matemáticos de la época. El camino que ha seguido la matemática del siglo XX no puede explicarse sin su huella. Su influencia se deja notar sobre varias generaciones que han trabajado en los celebérrimos problemas que marcó en la agenda del siglo. Fue, en suma, un matemático de matemáticos.

Mientras que su vida personal se caracterizó por una encomiable tranquilidad, su vida intelectual representó una aventura constante. Una vida que quizá no entre en la imagen del héroe, pero sí en la del creador. Una historia que está esperando ser contada. Hilbert tuvo la suerte de vivir en una época en la que tanto las matemáticas como la física progresaron enormemente, aunque al mismo tiempo experimentaron convulsiones muy profundas, que culminaron en una nueva forma de hacer matemáticas y, en física, en la plasmación de toda una revolución. Un período que registró una extraordinaria eclosión de creatividad, y del que Hilbert no solo fue espectador.

Nuestro recorrido por la vida y la obra científica de David Hilbert se articula en varias etapas que coinciden con los intereses matemáticos —álgebra, geometría, análisis, física teórica y fundamentos de la matemática— que fue desarrollando a lo largo de los años y que forjaron su reputación legendaria. Pero a lo largo del libro no solo trabaremos contacto con los conceptos que ideó o contribuyó a alumbrar, sino que también conoceremos a algunos de los personajes más importantes para la ciencia de comienzos del siglo XX. Minkowski, Poincaré, Einstein, Von Neumann o Gödel, entre muchos otros, desfilarán por estas páginas. El lector disfrutará de conocer o reencontrar a estas personalidades, cuyos nombres todo estudiante de ciencias ha conocido a través de los objetos y teoremas que los honran.

Hilbert pasó su infancia y su juventud en Königsberg, su ciudad natal, para trasladarse, entrado ya en la madurez, a Gotinga, donde residiría hasta el final de sus días. Desde su plaza de catedrático en la universidad promovió la creación de un instituto matemático que aglutinó a las mejores cabezas pensantes del momento. En torno a él medró la vanguardia de la matemática alemana y, en general, europea. Hasta que la llegada al poder de los nazis convirtió Gotinga en un erial.

La carrera del joven Hilbert comenzó a despuntar cuando resolvió, para asombro de sus colegas, un peliagudo problema algebraico que parecía inabordable. Pero poco después dejó el álgebra y comenzó a estudiar los fundamentos de la geometría, con la inestimable ayuda del método axiomático. Su trabajo apostó por el triunfo de este método. Él, más que cualquier otro, enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente, y convirtió el nuevo enfoque en la guía más segura en el universo matemático.

La conferencia que pronunció el 8 de agosto de 1900, un día de sofocante calor, durante el Congreso Internacional de Matemáticos de París mostró a la comunidad matemática la perspicacia del que pasaba por ser el hombre del futuro en matemáticas. La lógica es la higiene del matemático, pero no es su fuente de alimento. Son los grandes problemas los que le proporcionan el pan de cada día. Así, el abanico de veintitrés problemas que Hilbert planteó se tradujo en otros tantos retos que concitaron las ener-

gías de muchos de los mejores matemáticos de los siguientes cien años. De resultas, la matemática saldría expandida en múltiples direcciones. Algunos de estos problemas galvanizantes han sido definitivamente resueltos (caso, por ejemplo, de la *hipótesis del continuo*), aunque otros (como la *hipótesis de Riemann*) siguen esperando una solución.

Pero Hilbert no es solo un nombre mítico de la matemática. También lo es de la física, que transformó el mundo durante el siglo XX. Las ecuaciones de la relatividad general están parcialmente en deuda con su genialidad creativa, que estuvo a la par de la de Einstein. Por su parte, la mecánica cuántica se encuentra íntimamente ligada a una estructura matemática que lleva su nombre: el «espacio de Hilbert». Y es que el nuevo siglo encontró al matemático alemán perfilando —sin ser muy consciente de ello— lo que sería una nueva rama del análisis matemático: el análisis funcional.

No obstante, son los fundamentos de la matemática el tema que más páginas reclama. Las paradojas de la lógica y de la teoría de conjuntos, así como la pléyade de cuestiones abiertas sobre la propia seguridad de la matemática clásica, habían provocado profundas divisiones en la comunidad científica y generado un debate creciente sobre los fundamentos de la disciplina. Hacia 1920, nuestro protagonista, entonces en la cima de su carrera, se embarcó resueltamente en un ambicioso programa de fundamentación, por cuya defensa hubo de medirse a algunos de los primeros espadas en matemáticas del resto de Europa. Cual arquitecto que explorara los cimientos de un antiguo palacio que amenaza con derrumbarse, Hilbert recorrió las bases de la matemática buscando reparar sus grietas y asegurarla firmemente por los siglos de los siglos. Quería borrar la fea mancha de las paradojas del edificio por otra parte tan perfecto de la matemática. Le animaba a ello una confianza ciega en que era posible probar que la matemática, debidamente axiomatizada, no contenía contradicción alguna, era consistente. Una cuestión que Hilbert había fijado como uno de los primeros problemas de las matemáticas en la conferencia de 1900.

Siguiendo la pista a sus aportaciones, reviviremos una aventura épica y apasionante en pos de la certeza, en donde conflu-

yeron grandes lógicos y matemáticos de finales del siglo XIX y principios del XX, como Frege, Russell, Cantor, Poincaré, Brouwer o Gödel. Movidos por la riqueza de las matemáticas finiseculares, este puñado de matemáticos se pusieron a reflexionar sobre la naturaleza y el alcance de su quehacer. Tres tendencias se dejaron sentir especialmente: el logicismo, surgido con Frege y revitalizado por Russell, que defendía que todos los principios matemáticos podían reducirse a leyes lógicas; el intuicionismo, creación de Poincaré y Brouwer, que rechazaba los métodos de la matemática clásica que habían conducido a las paradojas; y, finalmente, el formalismo, identificable con el pensamiento de Hilbert, que buscaba axiomatizar la matemática al completo, demostrando rigurosamente que los axiomas no conducían nunca a una contradicción.

Hilbert lideró la escuela formalista, que en esencia defendía que los razonamientos matemáticos podían ser presentados axiomáticamente, dentro de un sistema formal, sin mención alguna al significado de los símbolos. Por medio de esta idea crucial, toda referencia al escurridizo y paradójico infinito podría soslayarse. Y, mediante la manipulación simbólica de un reducido número de axiomas de acuerdo a una o más reglas de inferencia, Hilbert pensaba que podrían deducirse en un número finito de pasos todos los teoremas de las matemáticas. Uno podría ver entonces la matemática como un mero juego de fórmulas y el problema de demostrar la no-contradictoriedad de los axiomas como una cuestión de combinatoria finita, de un análisis cuidadoso de las fórmulas que podían demostrarse dentro del sistema formal, de las secuencias de símbolos que producía el sistema. Pero los tenaces intentos de Hilbert por resolver este punto, poniendo las bases de la matemática más allá de toda duda razonable, se saldaron con un rotundo fracaso.

Un lógico austríaco de nombre Kurt Gödel saltó a la fama cuando anunció en 1931 que los métodos de Hilbert eran insuficientes para demostrar la consistencia de las matemáticas. Los teoremas de incompletitud de Gödel cayeron como un jarro de agua fría sobre Hilbert y sus seguidores; y, a la postre, significaron la quiebra de su programa. No era posible probar la certeza incontrovertible de las matemáticas. El insobornable convencimiento de que la matemática era la más segura de las ciencias acabó para

algunos en una frustración colectiva e histórica. Las matemáticas tienen una condición incierta, contingente y desfundada, pero que, aun a trancas y barrancas, progresa.

Hilbert personificó el ideal del matemático para la generación de entreguerras. Su patronazgo impulsó definitivamente la matemática moderna, que se configuró como una ciencia axiomática que estudia estructuras abstractas, lo que supuso una ruptura con la matemática del pasado, centrada en números, fórmulas y figuras en principio construibles.

David Hilbert fue, en definitiva, un matemático universal, pues tuvo un conocimiento casi total de todas las ramas de las matemáticas de su tiempo. Fue el último ejemplar de una especie ya extinguida.

1862 David Hilbert nace en la ciudad de Königsberg, Prusia.

1880 Comienza sus estudios de matemáticas en la Universidad de Königsberg, donde entabla amistad con Adolf Hurwitz y, en especial, con Hermann Minkowski.

1888 Se anota su primer gran triunfo matemático al resolver el problema de Gordan de la teoría de invariantes.

1892 Es nombrado profesor titular de la Universidad de Königsberg. Se casa con Käthe Jerosch.

1895 Es nombrado catedrático de la Universidad de Gotinga gracias al buen hacer de Felix Klein.

1897 Publica *El informe*, una síntesis magistral de los conocimientos de la época en el campo de la teoría algebraica de números.

1899 Publica *Fundamentos de la geometría*, en el que presenta todas las posibles geometrías con la única ayuda del método axiomático.

1900 Hilbert imparte la célebre conferencia titulada «Problemas matemáticos» en el II Congreso Internacional de Matemáticos en París.

1904 Rehabilita el *principio de Dirichlet* para el cálculo de variaciones.

1912 Compendia todos sus artículos sobre ecuaciones integrales en una monografía que incluye aplicaciones a la física del momento, así como una colección de herramientas imprescindibles para desarrollar la mecánica cuántica a partir de 1925.

1915 Compite con Albert Einstein en la búsqueda de las ecuaciones de campo de la teoría de la relatividad general.

1922 Retoma casi en exclusiva el interés por los fundamentos de las matemáticas, queriendo probar la consistencia de la matemática clásica para erradicar las dudas escépticas sobre su validez sembradas por los intuicionistas.

1928 Publica, en colaboración con Wilhelm Ackermann, *Fundamentos de lógica teórica*, el primer manual en sentido moderno de lógica matemática.

1930 Hilbert se retira de su puesto en Gotinga. Da una conferencia muy optimista tras ser nombrado ciudadano de honor de Königsberg, que remata con el lema «Debemos saber, sabremos». Kurt Gödel pone límites al formalismo auspiciado por Hilbert en un congreso celebrado en paralelo.

1934 Publica, junto con Paul Bernays, el primer volumen de *Fundamentos de las matemáticas*, que recoge los avances parciales en la materia.

1943 Muere en Gotinga (Alemania) mientras la Segunda Guerra Mundial se desarrolla con toda su crudeza.

CAPÍTULO 1

Los fundamentos de la geometría

La carrera del joven Hilbert comenzó a despuntar cuando resolvió el esquivo problema de Gordan. No obstante, aparcó el álgebra y la teoría de números y se sumergió de lleno en el estudio de los fundamentos de la geometría. El descubrimiento de las geometrías no euclídeas había puesto en jaque a la venerable geometría griega, con casi dos mil años de existencia. Una reformulación del método axiomático permitió a Hilbert poner orden en la materia, subrayando que no hay una única geometría válida sino muchas, cada una con un conjunto diferente de axiomas.

Königsberg, año 1862. Se cumplían cincuenta y ocho años de la muerte de Immanuel Kant. Y ciento veintiséis desde que Leonhard Euler (1707-1783) solucionara el célebre problema de los siete puentes. David Hilbert vino al mundo un 23 de enero. Lo hizo en el seno de una familia protestante de clase media afincada desde hacía dos generaciones en la capital de la Prusia Oriental. Una Prusia que en esos momentos comenzaba a liderar la unificación alemana, guiada con mano de hierro por el káiser Guillermo I y su canciller Otto von Bismarck. El padre era juez de la ciudad y educó a su hijo en los severos valores prusianos: puntualidad, disciplina y sentido del deber. La madre, en cambio, era aficionada a la filosofía, la astronomía y, según cuentan, los números primos.

Ya en sus años escolares Hilbert manifestó una personalidad tenaz, enérgica y decidida, aunque sufrió mucho en el instituto a causa de la obligación del aprendizaje meramente memorístico. No obstante, desarrolló una gran afición artística y literaria, que compartía con su gusto por las matemáticas, aunque sin llegar a ser un matemático precoz. En 1880, se examinó para el ingreso en la universidad, matriculándose en matemáticas, pese a que la familia quería que orientase su carrera hacia las leyes.

Si bien es cierto que Königsberg no era Berlín, donde ejercían profesores de la talla de Karl Weierstrass (1815-1897) o Leopold Kronecker (1823-1891), contaba con una sólida tradición mate-

mática. Allí había dado clases Carl Jacobi (1804-1851), considerado el segundo mejor matemático alemán en tiempos de Gauss. El telón de fondo de la educación que Hilbert recibió en la Universidad de Königsberg es el siguiente. Los matemáticos del último cuarto del siglo XIX solían considerar que su disciplina se dividía en tres: análisis, álgebra y geometría. El análisis incluía estudios sobre el uso cada vez más riguroso del cálculo infinitesimal, la resolución de ecuaciones diferenciales y, en general, la teoría de funciones. El álgebra estaba poco a poco dejando de parecerse a la que todos hemos estudiado en el instituto, para estudiar objetos cada vez más abstractos, aunque sin descuidar la teoría de números. Y, por último, la geometría englobaba en realidad una familia de geometrías diferentes y mal avenidas: la geometría euclídea y las no euclídeas (incluyendo aquí la geometría proyectiva), pero también la geometría diferencial y la geometría algebraica, que empleaban herramientas prestadas del análisis y del álgebra.

«Toda disciplina matemática atraviesa tres etapas en su desarrollo: la ingenua, la formal y la crítica.»

— David Hilbert.

Hilbert siguió con aprovechamiento cursos de álgebra, análisis y geometría; y en ellos conoció al que desde entonces sería su mejor amigo: Hermann Minkowski (1864-1909). Este condiscípulo era dos años más joven, pero iba un trimestre por delante. Con poco más de diecinueve años había ganado el Gran Premio de Matemáticas, concedido por la Academia de Ciencias de París (aunque la concesión no estuvo exenta de polémica, ya que hubo quien habló de plagio). Ambos amigos solían caminar juntos y discutir embelesados sobre matemáticas. Paseando exploraron cada rincón del saber matemático. Un hábito peripatético de los años de estudiante que Hilbert conservaría el resto de su vida.

Con el título de doctor en el bolsillo, Hilbert pensó en habilitarse a fin de ganar la condición de *privatdozent*, que le permitiría dar clases en la universidad (aunque sin sueldo por parte de la institución, cobrando solo la matrícula a los estudiantes).

Este proyecto pasaba por la presentación de alguna aportación original. A tal fin, Hilbert viajó para encontrarse con Felix Klein (1849-1925), uno de los popes de la matemática del momento. Pasados los años, Klein diría que supo inmediatamente que este joven era el hombre del porvenir en matemáticas. Siguiendo su consejo, Hilbert prolongó su viaje hasta París, donde conoció a Henri Poincaré (1854-1912). El científico francés era solo ocho años mayor que Hilbert, pero se trataba ya de un matemático consagrado. Era el máximo exponente de la matemática francesa, que buscaba tomar el relevo de la sobresaliente matemática alemana. A resultas de esto, Poincaré y Hilbert no congeniaron, y este distanciamiento se convirtió con el paso del tiempo en una acendrada rivalidad cuyo trasfondo sería la toma del timón de la matemática del futuro (de hecho, las relaciones entre Poincaré y Klein tampoco eran buenas: la competencia entre ambos se había saldado con una crisis depresiva por parte del último). Durante el viaje de regreso a Königsberg, Hilbert hizo un alto en la Universidad de Gotinga para visitar a un recién instalado Klein. Gracias a su mediación, entró en contacto con Paul Gordan (1837-1912), uno de los mayores expertos en teoría de invariantes, un campo en el que Hilbert se apuntaría su primer gran éxito.

DEL ÁLGEBRA A LA TEORÍA DE NÚMEROS

La teoría de invariantes era una rama del álgebra del siglo XIX que estudiaba qué cantidades no cambian (permanecen invariantes) cuando transformamos un polinomio en otro de acuerdo a ciertas reglas. Uno de los problemas abiertos más estimulantes había sido bautizado como el *problema de Gordan*. En 1888, Hilbert dejó boquiabiertos a sus contemporáneos ofreciendo una solución revolucionaria del problema, que Gordan, el *rey de los invariantes*, tildó de «teológica». Hilbert consiguió demostrar el resultado que todos los expertos en invariantes llevaban años persiguiendo: el llamado *teorema fundamental de la teoría de invariantes*, que afirma que cualquier sistema de invariantes está finitamente generado (es

decir, simplificando, que cualquier invariante del sistema puede representarse como una combinación de unos pocos invariantes, que forman una base). Un bello teorema, en absoluto trivial.

Lo que aquí nos interesa no es explicar su contenido, sino la forma en que Hilbert lo demostró, ya que nos dará muchas pistas del camino que tomó su carrera como investigador. Al igual que hizo en otras ramas de la matemática, Hilbert avanzó muchos de los elementos que constituirían un nuevo enfoque. En este caso, el enfoque estructural del álgebra, que se fija en las estructuras que satisfacen los objetos matemáticos más que en los objetos matemáticos en sí mismos; en los grupos, ideales, anillos y cuerpos (las estructuras algebraicas) más que en los propios números o polinomios concretos que contienen. Sin ser muy consciente de ello, Hilbert estaba preparando el álgebra abstracta del siglo XX y, de paso, defendiendo una nueva manera de hacer matemáticas, que él abanderaría.

El tratamiento de Hilbert era muy diferente al habitual: en vez de buscar explícitamente la solución del problema, demostró que el problema no podía no tener solución. Su prueba no era constructiva. Era existencial. No ofrecía directamente la solución («aquí está, esta es la base de invariantes»), sino que demostraba que necesariamente tenía que haberla («si no hubiera una base de invariantes, llegaríamos a una contradicción»). La demostración del teorema fundamental se basaba, por tanto, en un razonamiento por reducción al absurdo. Una argumentación que no era aceptada unánimemente por la comunidad matemática.

Kronecker, una de las grandes figuras de la matemática alemana del momento, arremetió duramente. La demostración era (supuestamente) «siniestra». Para Kronecker, una demostración de existencia pasaba forzosamente por la construcción del objeto cuya existencia se quería demostrar. En este caso, por la construcción de la base de invariantes que Hilbert afirmaba que existía. No aceptaba la argumentación de que la no existencia de la base implicaba una contradicción y, por tanto, la base en cuestión tenía obligatoriamente que existir, aunque no fuera factible calcularla.

No obstante, Hilbert pudo publicar su artículo en 1890 en los *Mathematische Annalen* que editaba Klein. Gordan fue el árbitro

DEMOSTRACIONES CONSTRUCTIVAS Y DEMOSTRACIONES EXISTENCIALES

Pongamos un ejemplo para comprender la diferencia entre ambas. Si la pregunta es, pongamos por caso, si la ecuación $x^2-1=0$ tiene solución, uno tiene dos alternativas. O bien, de forma obvia, determina explícitamente las soluciones mediante cálculos y manipulaciones algebraicas: $x=1$ y $x=-1$. O bien, de otra manera, intenta responder indirectamente: garantiza recurriendo a algún teorema que la ecuación tiene solución, aunque no sepa hallarla. Naturalmente, esta segunda vía resulta de mayor utilidad cuando el matemático se enfrenta a problemas mucho más complicados que resolver una sencilla ecuación de segundo grado. Muchas veces, con ecuaciones de grado superior, es más fácil demostrar la existencia de solución que dar con ella.

Una vía ya utilizada en la Antigüedad

Esta característica es común a muchos problemas matemáticos. En la Antigüedad, Euclides demostró que existen infinitos números primos sin necesidad de enumerarlos todos. Para ello, razonó por reducción al absurdo. El primer paso en una demostración por reducción al absurdo consiste en negar el enunciado que se quiere probar. Euclides, para probar que existen infinitos números primos, supuso que solo había una cantidad finita: $p_1, p_2, ..., p_n$. A partir de esta suposición, comenzó a hacer deducciones hasta llegar a una afirmación absurda. En efecto, si suponemos que solo hay esos n números primos, entonces, una de dos: el número $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n+1$ (formado multiplicándolos todos y sumando uno) es primo, o no lo es. En el primer caso, existe una contradicción, pues este nuevo número primo no es ninguno de los de partida. En el segundo caso, si no es primo, debe ser divisible por un número primo, pero claramente ninguno de los $p_1, p_2, ..., p_n$ lo divide (la división no es exacta, da 1 de resto). Y llegamos de nuevo a una contradicción. Por consiguiente, la hipótesis de que solo hay una cantidad finita de números primos ha de ser falsa, y tiene que haber una cantidad infinita de ellos (aunque no sepamos determinarlos uno a uno). La reducción al absurdo, que Euclides y Hilbert tanto amaban, es una de las mejores armas de la matemática.

del artículo y, aunque al principio exigió cambios sustanciales, terminó apreciando la aproximación revolucionaria de Hilbert. Los trabajos anteriores de Gordan, repletos de páginas con cálculos enormemente largos y complicados, contrastaban con el de Hilbert, que procedía de manera breve, elegante y sucinta, por medio de una reducción al absurdo. Pero la intervención de Klein fue decisiva para limar asperezas entre ambos, dado que Hilbert

se había negado a cambiar ni una coma del artículo. Al final, Gordan acabó reconociendo que hasta la teología tenía sus usos.

Hilbert había desafiado y ganado a quienes insistían en que las demostraciones matemáticas debían proporcionar un método que mostrara explícitamente las entidades cuya existencia se quería demostrar. Había probado que la suposición de que la hipótesis de Gordan («existe una base de invariantes») era falsa conducía a una contradicción. Con eso bastaba. Muchos años después, Hilbert explicaría a sus alumnos la diferencia entre las demostraciones constructivas y las que no lo son (las existenciales) señalando que entre sus estudiantes (ninguno de los cuales era completamente calvo), había uno que tenía menos pelos en la cabeza, aunque no contaba con ningún medio de identificar a ese alumno.

«¡Esto no son matemáticas! ¡Es teología!»

— Gordan, tras conocer la prueba de Hilbert.

Lo que estaba en juego no era solamente el futuro de la teoría de invariantes (un área de investigación que Hilbert dejó prácticamente cerrada), sino algo más, mucho más en realidad: la lucha entre dos visiones muy distintas del hacer matemático. Por un lado, la constructiva, típica del siglo XIX. Por otro, la existencial, una tendencia que caracterizaría el siglo XX, y donde la palabra existir no tendría más que un significado: estar exento de contradicción. El enfoque existencial hilbertiano iba a ser, como tendremos ocasión de averiguar, la fuente de muchos de sus éxitos y de muchas controversias posteriores.

Por fin, en 1892, Hilbert vio coronado su esfuerzo y fue nombrado profesor titular de la Universidad de Königsberg. Pese a que llegó a ser un profesor muy bueno, apenas atrajo estudiantes en sus inicios. Lejos de desanimarse, se tomó este período como un proceso de lenta pero continua maduración. Ese mismo año se casó con Khäte Jerosch, a quien conocía desde la infancia (era su pareja de baile favorita) y con quien tuvo un único hijo, Franz, que nació al año siguiente, pero que desde pequeño sufrió una grave enfermedad mental. Cuando al muchacho le diagnosticaron esquizofrenia, su padre lo internó en un manicomio, donde pasó buena

EL ÁLGEBRA MODERNA Y EL *NULLSTELLENSATZ*

Babilonios, egipcios y griegos resolvían ecuaciones de primer y segundo grado mediante diversas técnicas algebraicas. La influencia del álgebra geométrica griega se percibe aún en la conservación de expresiones como «cuadrado» y «cubo» para la segunda y tercera potencias: «*a* al cuadrado» es un cuadrado de lado *a* y «*a* al cubo» es un cubo de arista *a*. La introducción de un nuevo aparato simbólico (Diofanto, Al-Juarismi, Vieta) produjo una verdadera inflexión en el desarrollo del álgebra que posibilitó su despegue. En el Renacimiento, Tartaglia (llamado así por su tartamudez) dio con la fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado, pero decidió mantenerla en secreto. El astrólogo y matemático Gerolamo Cardano consiguió que se la confiara, pero le traicionó y la publicó haciéndola pasar por suya. Finalmente, Ludovico Ferrari, antiguo secretario de Cardano, dio con otra fórmula para resolver ecuaciones de cuarto grado. Sin embargo, la resolución por radicales de la ecuación polinómica de quinto grado se les resistió. Trescientos años después, Abel demostraría que es imposible.



Gauss a la edad de cincuenta años. Litografía aparecida en *Astronomische Nachrichten* (1828).

Gauss y el teorema fundamental del álgebra

Pero para asistir al nacimiento del álgebra moderna hemos de asomarnos a la lectura de la tesis doctoral de Gauss, presentada en 1797. El genial Gauss halló lo que se conoce como *teorema fundamental del álgebra*, que prueba que cualquier ecuación polinómica de grado *n* posee exactamente *n* soluciones en el cuerpo de los números complejos. Aunque este resultado ya había sido conjeturado, entre otros, por Descartes (distinguiendo entre raíces reales e imaginarias), así como demostrado en falso por D'Alembert (su prueba contenía varios gazapos), solo con Gauss fue probado de forma completa. Su trabajo cambió dramáticamente el aspecto del álgebra. Precisamente, el largo camino de Hilbert a través de la teoría de invariantes sirvió para que demostrara lo que se conoce como *Nullstellensatz* o *teorema de los ceros*: un potente resultado que generaliza el teorema fundamental del álgebra para el caso en que, en vez de una ecuación, tenemos un sistema de ecuaciones algebraicas.

parte del resto de su vida. Desde ese momento Hilbert decidió comportarse como si nunca hubiera tenido un hijo.

En 1895 tuvo lugar un cambio decisivo en su vida. En una carta confidencial se le anunciaba el nombramiento, a propuesta de Klein, como catedrático de la prestigiosa Universidad de Gotinga, donde habían ejercido dos grandes de las matemáticas como Gauss y Riemann. Su marcha no se hizo esperar. No abandonaría Gotinga jamás.

Entre tanto, Hilbert había pasado de la teoría de invariantes a la teoría de números, una disciplina típicamente alemana desde que Gauss publicara sus *Disquisitiones arithmeticae* (1801) y se refiriera a ella como «la reina de las matemáticas». La Sociedad Matemática Alemana (fundada en 1890 bajo la presidencia de Georg Cantor [1845-1918]) encargó a Hilbert y Minkowski la elaboración de un informe sobre el estado de la cuestión. Minkowski no tardó en retirarse, porque estaba demasiado ocupado. Y Hilbert, en solitario, hizo mucho más de lo que le pedían y esperaban. Escribió una joya de la literatura matemática, un clásico de obligada partida para todos los investigadores del área. *Der Zahlbericht (El informe)* está fechado el 10 de abril de 1897. En él recopiló todos los conocimientos relevantes, reorganizados bajo un nuevo punto de vista, rehaciendo formulaciones y demostraciones. No solo reordenó las piezas del rompecabezas que era la teoría algebraica de números, sino que rellenó los huecos con investigaciones originales. Con sus propias palabras, entresacadas del prólogo al informe:

> La teoría de números es un edificio de rara belleza y armonía. [...] El objetivo del presente informe es describir los resultados de la teoría de números, con sus demostraciones, con un desarrollo lógico y desde un punto de vista unificado, y así contribuir a acercar el momento en que los logros de nuestros grandes autores clásicos de teoría de números pasen a ser propiedad común de todos los matemáticos.

El informe colocó a Hilbert a la vanguardia de la matemática europea. Desde luego, esta primera ojeada a su actividad matemática en estos años clave de formación puede dar la impresión de que se trataba de un investigador muy bueno, pero muy especiali-

LA PRIMERA REVOLUCIÓN CIENTÍFICA



Imagen idealizada de Euclides, pintada por Justus van Gent en 1474.

Las antiguas civilizaciones babilónica y egipcia lograron apreciables conocimientos geométricos. Pero sus «matemáticas», si pueden llamarse así, no sobrepasaban un estadio técnico, ya que radicaban en colecciones de recetas indicadas para resolver problemas cotidianos, que tenían que ver con la práctica de los agrimensores y en las que la noción de demostración apenas se atisbaba. Los enunciados de los teoremas geométricos de Tales de Mileto (ca. 624 a.C.-ca. 546 a.C.) harían sonreír a los agrimensores egipcios por su simplicidad y falta de utilidad (por ejemplo, el diámetro de la circunferencia divide el círculo en dos partes iguales); pero se trataba de los primeros teoremas, probados por puesta en evidencia, y que siguen siendo verdad más de dos mil años después. Con el tiempo, Tales logró medir la altura de la Gran Pirámide mediante una simple regla de tres. Otro que entabló contacto con babilonios y egipcios fue Pitágoras. Bajo la dirección de Platón, la Academia de Atenas sistematizó las matemáticas pitagóricas, destacando Teeteto (ca. 417 a.C.-ca. 369 a.C.) y Eudoxo (ca. 390 a.C.-ca. 337 a.C.); al primero se le atribuye el teorema que establece que solo existen cinco poliedros regulares, los cinco sólidos platónicos. Simultáneamente, los tres problemas clásicos (trisección del ángulo, cuadratura del círculo, duplicación del cubo) sirvieron de cuestiones fascinantes de la geometría del momento (imposibles de zanjar empleando regla y compás). Pero hay que saltar de la Academia al Museo de Alejandría para encontrarnos con Euclides, cuya obra —junto a la de Apolonio y Arquímedes— cierra la época dorada de la geometría griega.

zado. No era fácil prever lo que iba a venir: el ascenso de Hilbert a la cumbre del mundo matemático y la convicción general de que fue —al igual que Poincaré— uno de los últimos matemáticos universales, que dominó todos los campos de su ciencia, incluyendo

aquí su siguiente conquista: la geometría. Pero, para poder valorar la aportación fundamental de Hilbert en este terreno, es necesario decir antes algunas palabras sobre el trasfondo histórico, sobre el fuerte impulso que el siglo XIX dio a la geometría, y contar cómo el descubrimiento de las geometrías no euclídeas cambió de forma radical el método axiomático.

LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

La geometría griega fue la piedra angular de las matemáticas durante siglos. En los *Elementos*, un tratado que se remonta al 300 a.C., Euclides ofreció una presentación axiomática, extremadamente ordenada y estructurada, del corpus de conocimiento transmitido por los matemáticos pitagóricos y platónicos. Su presentación, influida por las reflexiones aristotélicas sobre la lógica, poseía una característica muy destacable: un enorme rigor a la hora de demostrar cada teorema.

Los *Elementos* se dividen en 13 libros y contienen 465 proposiciones geométricas, desde los principios más básicos a las consecuencias más elaboradas. Euclides comienza el Libro I con una lista de 23 definiciones, de manera que el lector sepa precisamente qué significan los términos geométricos fundamentales (punto, recta, triángulo, circunferencia, etc.). Por ejemplo: «Un punto es lo que no tiene partes». A continuación, definidos los términos, Euclides presenta cinco postulados que sirven de fundamento a toda su geometría. Estos postulados se presentan sin demostración o justificación. Sencillamente deben aceptarse. Son premisas de todo lo demás. Por ejemplo: «Es posible trazar una línea recta entre dos puntos cualesquiera». Finalmente, tras las definiciones y los postulados geométricos, especifica una serie de nociones comunes o verdades indiscutibles. Por ejemplo: «El todo es mayor que la parte» o «Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí». A partir de aquí, Euclides comienza a meterse en honduras. Así, la primera proposición de los *Elementos* muestra cómo construir un triángulo equilátero sobre un segmento lineal dado.

Mientras que las nociones comunes son de raigambre puramente lógica, los postulados o axiomas son de naturaleza netamente geométrica. Especifican, por así decir, las reglas de acuerdo con las cuales se manipulan los objetos matemáticos que Euclides ha definido previamente. Estos cinco postulados o axiomas son los siguientes:

1. Dados dos puntos A y B hay una recta que pasa por ambos.

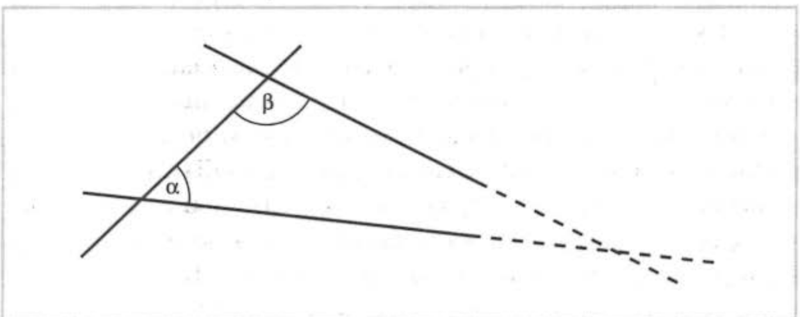
2. Todo segmento puede prolongarse indefinidamente.

3. Dado un punto A y un segmento r, puede construirse una circunferencia de centro A y de radio r.

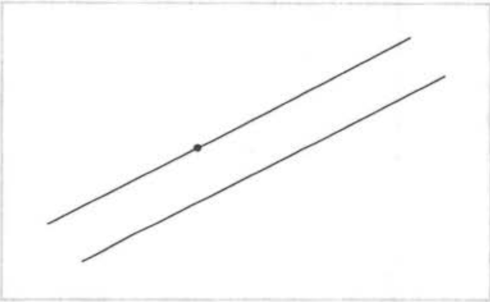
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Si una recta corta a otras dos de modo que la suma de los ángulos internos α y β es menor que dos rectos, entonces las dos rectas se cortarán en un punto que estará del mismo lado que los ángulos (véase la figura).

A diferencia del resto, el quinto postulado de Euclides tiene un enunciado bastante poco intuitivo, lo que llevó a que numerosos matemáticos —Ptolomeo (siglo II d.C.), John Wallis (1616-1703) y Jerónimo Saccheri (1667-1733), entre otros— intentaran demostrarlo infructuosamente a partir del resto de postulados.



Esquema que ilustra el quinto postulado de Euclides.



Esquema que ilustra el axioma de paralelas.

Cada uno superó en sutileza e ingenio al anterior en su intento de probarlo. Pero en el curso de sus demostraciones lo único que lograron fue dar con formulaciones equivalentes del quinto postulado. Una de ellas es el célebre *axioma de paralelas*: «Por un punto exterior a una recta cabe trazar una única paralela» (véase la figura). Otra versión equivalente establece que «la suma de los ángulos de un triángulo es exactamente la de dos rectos». No obstante, la historia del quinto postulado o axioma de paralelas guardaba un final sorprendente.

¿Cómo lograron los matemáticos liberarse de las cadenas de la geometría euclídea? Durante más de dos mil años estuvieron convencidos de que era la única geometría posible, la única descripción convincente del mundo, puesto que solo había un espacio físico. Pero, a lo largo del siglo XIX el descubrimiento de geometrías distintas (que no satisfacían el axioma de paralelas) alimentó la ansiedad que sentían y les hizo pensar que habían estado equivocados demasiado tiempo. Aclarar esta cuestión palpitante era en cierto modo esclarecer qué forma tenía el mundo (si es que tenía alguna).

La primera geometría no euclídea con la que se familiarizaron era, aunque parezca mentira, una vieja conocida: la geometría proyectiva. Esta geometría comenzó su andadura en el Renacimiento, cuando los pintores se interesaron por la proyección del espacio en el plano del lienzo. Descubrieron entonces una de las propiedades distintivas de la geometría proyectiva (y que la diferencia radicalmente de la euclídea): dos rectas que en el espacio tridimensional aparecen como paralelas, se transforman en el lienzo bidimensional en un par de rectas secantes que se cortan en el horizonte, en el infinito. A la manera como las vías del tren, que siempre son paralelas, aparecen en las fotografías como cortándose en el punto de fuga. De modo que en la geometría proyectiva dos rectas cualesquiera siempre se intersecan: o bien en un punto

propio, o bien en el infinito. En consecuencia, la geometría proyectiva contradice el axioma de paralelas, ya que por un punto exterior a una recta no pasa ninguna otra recta paralela.

A comienzos del siglo XIX, la geometría proyectiva recibió un gran impulso de manos del matemático francés Victor Poncelet (1788-1867), un oficial napoleónico que aprovechó su cautiverio en Rusia para perfeccionar sus ideas al respecto. A su regreso publicó el *Tratado sobre las propiedades proyectivas de las figuras* (1822), donde acuñó precisamente el término *geometría proyectiva* para referirse al estudio de las propiedades de las figuras que se conservan al proyectarlas, o de otra forma, las propiedades que las figuras tienen en común con sus sombras, con sus proyecciones. Estas propiedades incluyen relaciones de incidencia, pero no de distancia o tamaño. Así, si tres puntos están alineados, al proyectarlos siguen alineados, pero es muy posible que la distancia entre ellos haya variado. Del mismo modo, la sombra que cada uno de nosotros proyecta no tiene exactamente nuestro mismo tamaño. Avanzado el siglo, el matemático alemán Julius Plücker (1801-1868) introdujo coordenadas en la geometría proyectiva, lo que permitió algebrizarla y probar múltiples resultados desde una perspectiva analítica.

Ahora bien, la geometría proyectiva constituía un caso muy especial de geometría no euclídea. Estaba claro que el axioma de paralelas no se verificaba (puesto que en el plano proyectivo no existen rectas paralelas), pero la geometría proyectiva no solo renunciaba al axioma de paralelas, sino también a medir ángulos y distancias (ya que las proyecciones no los conservan). En suma, no solo no se verificaba el quinto postulado de Euclides, tampoco lo hacía, por ejemplo, el cuarto (que habla de ángulos). Este hecho hizo que los matemáticos no consideraran la geometría proyectiva como una verdadera geometría no euclídea.

La meta que parecía inalcanzable era construir desde cero una nueva geometría que satisficiera todos los axiomas euclídeos a excepción del axioma de paralelas. Si este último se negaba, había dos opciones: o bien se negaba la existencia de rectas paralelas («no hay paralelas»), o bien se negaba la unicidad de la recta paralela a una dada por un punto exterior («hay más de una paralela»).

EL PROGRAMA DE ERLANGEN



Felix Klein.

Felix Klein (1849-1925), maestro de Hilbert, difundió una visión muy articulada de la geometría. Cualquier geometría consistía en un espacio y un grupo de transformaciones. Así pues, para Klein, la geometría era el estudio de las propiedades de los objetos que quedan invariantes a través de cierto grupo de transformaciones o movimientos que se han fijado de antemano. Obsesionado con el papel de la geometría proyectiva como unificador de las distintas geometrías, demostró que esta, al venir dada por el grupo de las proyecciones, que era el grupo mayor, se constituía como la geometría más fundamental, la que descansaba sobre el mínimo número de hipótesis iniciales. Todas las demás geometrías se derivaban de ella añadiendo hipótesis adicionales. En concreto, lo hacía la geometría euclídea, que heredaba todas las propiedades proyectivas. Esta es la tesis que difundió en la lección inaugural de su toma de posesión en 1872 de la cátedra en la Universidad de Erlangen.

Tanto Carl Friedrich Gauss (1777-1855) como János Bolyai (1802-1860) y Nikolái Lobachevski (1792-1856) aceptaron la existencia de paralelas negando su unicidad: por un punto exterior a una recta pasaba más de una recta paralela. Estos tres matemáticos lograron deducir una buena ración de teoremas de su geometría imaginaria sin llegar a ningún absurdo, a ninguna contradicción. Pero, ¿no estaría esperándolos a la vuelta de la esquina? ¿Quién les aseguraba que si no hubieran llevado un poco más lejos sus deducciones no habrían llegado a alguna contradicción? A mediados de siglo se hacía cada vez más necesario ofrecer un modelo de esta nueva geometría dentro de la geometría euclídea, de modo que si encerraba una contradicción, también

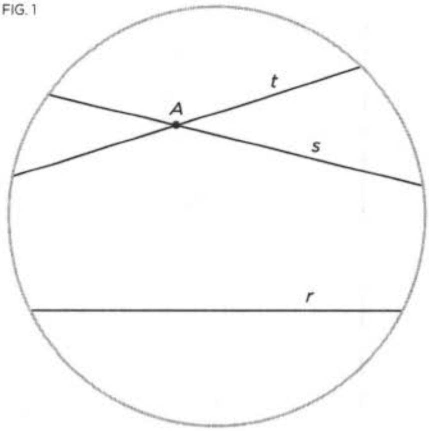
sería parte de la venerable geometría euclídea (lo que parecía imposible). Mediante este subterfugio se probaba de una vez por todas que la validez de la nueva geometría descansaba, precisamente, sobre la de la geometría euclídea, que se tenía por segura. Este cometido le correspondió en parte a Eugenio Beltrami (1835-1900), que ofreció un modelo local en 1868: la *pseudoesfera*. Dos años después, en 1870, Klein descubrió el primer modelo global de geometría no euclídea.

> «Por amor de Dios, te lo ruego, olvídalo. Témelo como a las pasiones sensuales, porque lo mismo que ellas, puede llegar a absorber todo tu tiempo y privarte de tu salud, de la paz de espíritu y de la felicidad en la vida.»
>
> — **Carta de Farkas Bolyai a su hijo János, al saber que estaba trabajando en el quinto postulado de Euclides.**

Conozcamos el modelo de Klein. Imaginemos que nuestro espacio se ha reducido al interior de un círculo (sin incluir su borde) y construyamos una especie de diccionario haciendo corresponder, uno a uno, una serie de términos, de la misma manera que lo hace un diccionario corriente con las palabras de dos lenguas cuyo significado es el mismo. Cuando Euclides dice «punto», nosotros pensaremos en los puntos del interior del círculo; y cuando dice «recta», interpretaremos los segmentos que empiezan y terminan en el borde del círculo. Con esta traducción hemos construido un modelo de geometría no euclídea dentro del propio espacio euclídeo. Veamos qué ocurre con el axioma de paralelas. Dada una recta r y un punto exterior A, hay más de una recta paralela a r que pasa por A. En efecto, las rectas s y t son paralelas a la recta r, ya que no se cortan nunca en nuestro espacio, dentro del círculo (véase la figura 1, en la página siguiente). De la nada se había creado un nuevo y extraño universo. Definitivamente, Euclides estaba herido de muerte.

Las dudas sobre la geometría no euclídea se disiparon aún más cuando se difundieron las ideas que Bernhard Riemann (1826-1866) había presentado en su disertación *Sobre las hipótesis en*

FIG. 1



que se basa la geometría, leída en 1854 (ante un Gauss casi octogenario que no pudo disimular su entusiasmo ante lo que escuchaba), pero no publicada hasta después de su muerte. Basándose en los estudios de este último en geometría diferencial, Riemann planteó que en cada espacio puede definirse una forma distinta de medir la distancia, de modo que una recta en ese espacio (que, por definición, es «el camino más corto entre dos puntos») no coincida con la idea preconcebida que tenemos de ella. La curva especial resultante, denominada *geodésica*, jugaría en ese espacio el papel que la línea recta hace en la geometría euclídea. Según Riemann, el espacio euclídeo se caracteriza por tener curvatura constante cero, donde hay una única paralela (véase la figura 2 [1]). Pero, si cambiamos el valor de la curvatura, obtenemos otro tipo de espacio, que será modelo de una geometría no euclídea. Si la curvatura es negativa, obtenemos la geometría hiperbólica de Gauss-Bolyai-Lobachevski, donde por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela [2]. Por el contrario, si la curvatura es positiva, obtenemos la geometría elíptica, donde no hay paralelas [3].

Riemann contribuyó a aclarar cómo interpretar la esfera como un modelo de geometría elíptica y, por tanto, de geometría no euclídea, donde el axioma de paralelas es falso en el sentido de que no hay rectas paralelas (como ocurre en la geometría proyectiva). En la esfera, el papel de las rectas lo juegan los círculos máximos. Entonces, si llamamos rectas a los círculos máximos, obtenemos un modelo euclídeo de la geometría elíptica. Y dos círculos máximos cualesquiera siempre se intersecan entre sí. Es el caso de los meridianos terrestres, que siempre se cortan en los polos. Al no cumplirse el axioma de paralelas, la suma de los ángulos de un triángulo no tiene por qué ser 180°, como se muestra

FIG. 2

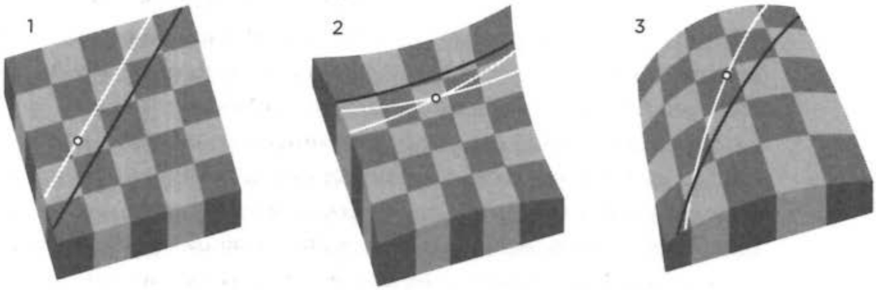


FIG. 3

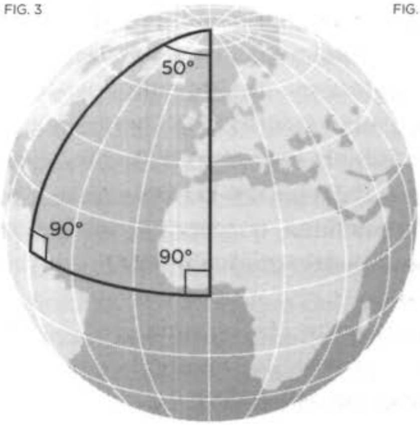
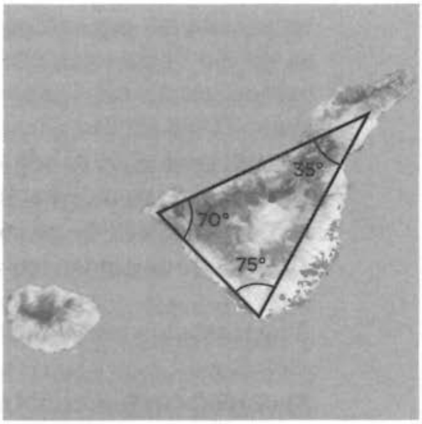


FIG. 4



en el triángulo esférico de la figura 3, cuyos ángulos suman 230°. Sin embargo, localmente, a pequeña escala, la geometría euclídea parece cumplirse (véase la figura 4, en la que los ángulos del triángulo suman 180°). Además, el resultado de realizar otras identificaciones permitió contemplar el plano proyectivo, a su vez, en términos de geometría esférica.

En resumen, los modelos de geometrías no euclídeas que los matemáticos del siglo XIX fueron sacando a la luz no hicieron sino devolver la pelota al tejado de la geometría euclídea. En efecto, si antes esta última era la única que aparecía como válida y ahora resultaba que la validez de las extrañas geometrías no euclídeas era

exactamente la misma que la de la geometría euclídea (puesto que los distintos modelos estaban contenidos dentro de ella), cabía hacerse la siguiente pregunta candente: ¿cuál era, entonces, la validez de la geometría euclídea? ¿Podía demostrarse fuera de toda duda que no engendraba ninguna contradicción?

La consecuencia más importante del nacimiento de las geometrías no euclídeas fue, en el orden de los fundamentos, sacar a la luz el problema de la validez de la geometría y de la matemática toda. Hasta entonces, la coherencia de la geometría euclídea se había asegurado basándose en que se correspondía con el espacio físico, donde no hay contradicciones. Además de los interesantes resultados que se iban agregando continuamente, la atención se dirigió hacia estas preguntas fundacionales. El enfoque axiomático del último tercio del siglo XIX —capitaneado por Moritz Pasch (1843-1930) y Giuseppe Peano (1858-1930)— se las planteó vigorosamente, pero solo con Hilbert encontraron una respuesta definitiva. El paso previo a responderlas era buscar una axiomática adecuada de la geometría euclídea, que cerrase las brechas lógicas que se habían ido descubriendo gradualmente.

EL ENFOQUE AXIOMÁTICO DE HILBERT

Al igual que hiciera con la teoría de invariantes, llegó un día en que Hilbert se cansó y abandonó la teoría de números, pasándose al estudio de los fundamentos de la geometría. Nadie podía sospecharlo, aunque hubiera dictado un par de cursos sobre la materia en Königsberg. Este cambio de rumbo pilló por sorpresa a todos sus nuevos colegas de Gotinga. No obstante, en *El informe Zahlbericht*, Hilbert enfatizaba que el desarrollo moderno de la matemática había sucedido ante todo bajo el signo del número y, acto seguido, animaba a una aritmetización de la geometría, orientada a un análisis puramente lógico del tema. Puede verse aquí la promesa de escribir los célebres *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de la geometría)*, que aparecieron en 1899 con ocasión de la inauguración en Gotinga de una estatua dedicada a Gauss y

Wilhelm Weber que conmemoraba su invención del telégrafo. La obra se convirtió enseguida en un paradigma esencial para la investigación de fundamentos y ha hecho por promover la práctica axiomática en el siglo xx lo mismo que los *Elementos* hicieron en los siglos anteriores.

El libro contenía una axiomática para la geometría que superaba con creces no solo a la de Euclides, sino a las propuestas por Pasch o Peano. Hilbert había percibido con claridad que la labor de establecer el mínimo número de suposiciones del cual pudiera derivarse toda la geometría no había sido aún completamente realizada. Es así que propuso un total de veintiún axiomas, que Hilbert no se sacó de la chistera, sino que venían siendo empleados implícita o explícitamente desde antiguo y que, en todo caso, no eran solo fruto del pensamiento puro, sino también de la intuición sensorial (lo que justifica que el libro arranque con una cita de Kant). La geometría, según la concebía Hilbert, estaba más cerca de la mecánica y de la física que del álgebra y la teoría de números.

Hilbert formuló sus axiomas para tres sistemas de objetos indefinidos. A los objetos del primer sistema los denominó por conveniencia *puntos*; a los del segundo, *rectas*; y, a los del tercero, *planos*. Pero, a diferencia de Euclides, en ningún momento entró a definir los entes geométricos primitivos. Son los axiomas los que los definen implícitamente, ya que establecen qué relaciones hay entre ellos. Determinan lo que se puede afirmar y hacer con puntos, rectas y planos. Para Hilbert había que purgar el significado que los objetos elementales colaban de matute. Son los axiomas, y solo los axiomas (sin ninguna idea preconcebida o dibujo alguno), los que definen los objetos elementales a través de sus relaciones mutuas. «Uno debería poder decir siempre, en lugar de "puntos, rectas y planos", "mesas, sillas y jarras de cerveza"», escribió. Los axiomas admiten interpretaciones múltiples, siendo esta característica la principal diferencia entre la axiomática *material* de Euclides y la nueva axiomática *formal* de Hilbert.

Pero hay más. Hilbert desplegó toda su habilidad matemática y organizó sus veintiún axiomas para la geometría euclídea en cinco grupos:

— Axiomas de incidencia o enlace, que conectan entre sí los diferentes objetos y, por ejemplo, permiten afirmar que «este punto yace en esta recta» o «esta recta yace en este plano».

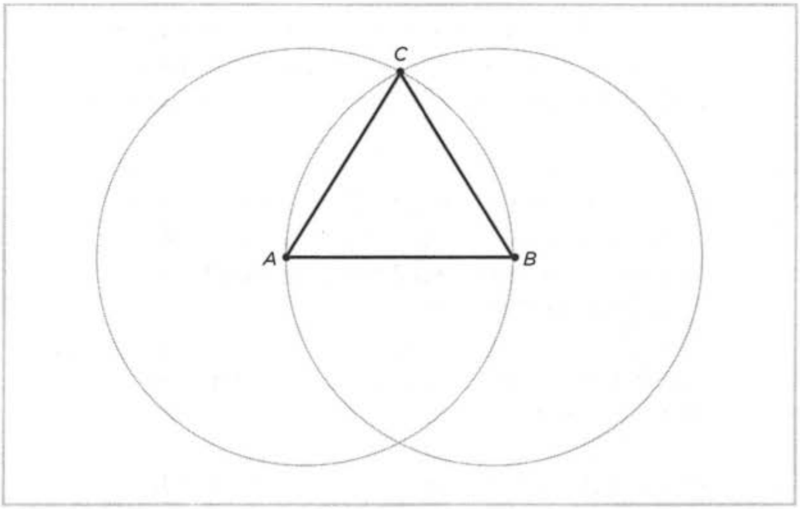
— Axiomas de orden, que permiten decir, por ejemplo, «este punto está entre estos dos» (como notara Pasch, esta clase de axiomas estaba completamente ausente de la lista de postulados euclídeos).

— Axiomas de congruencia, que sirven para comparar e igualar segmentos.

— Axiomas de paralelismo, un grupo de axiomas que solo contiene el célebre axioma de paralelas.

— Axiomas de continuidad, que son dos axiomas en realidad. Por un lado, el llamado *axioma de Arquímedes*, que establece que dados dos segmentos arbitrarios, si repetimos sucesivas veces cualquiera de ellos, podemos lograr construir un segmento mayor que el otro en un número finito de pasos; y, por otro, el *axioma de plenitud lineal* o *de continuidad de la recta*: los puntos de una recta forman un sistema que no es susceptible de ampliación alguna bajo la condición de conservar la ordenación lineal, los axiomas de congruencia y el axioma de Arquímedes.

Este último axioma brillaba por su ausencia en los *Elementos*, pese a que su uso es indispensable incluso para demostrar la Proposición I del Libro I. Constituye una de las grandes aportaciones de Hilbert el haberlo sacado a la luz. Sin él, $\mathbb{Q}^2$ (esto es, el plano en el que nos hemos quedado solo con los puntos que tienen coordenadas racionales) sería un modelo de la geometría euclídea, ya que satisfaría todos los axiomas anteriores. Y, sin embargo, como subrayara Richard Dedekind (1831-1916), en este plano agujereado dos circunferencias, cada una pasando por el centro de la otra, no tendrían por qué cortarse (algo que se presuponía en la



Sin el axioma de continuidad no se puede asegurar que las dos circunferencias del dibujo se corten en el punto *C* y, por tanto, que sea posible construir el triángulo equilátero de lado *AB* (tal y como se afirma en la Proposición I del Libro I de los *Elementos*).

Proposición I), porque pueden hacerlo en un punto con coordenadas irracionales (en un agujero). El axioma de plenitud lineal o de continuidad de la recta permite identificar cualquier recta con los números reales $\mathbb{R}$ y, de este modo, el plano con $\mathbb{R}^2$ (esto es, con el plano al completo, con todos los puntos con coordenadas racionales e irracionales), donde está garantizado que las dos circunferencias anteriores se cortan (véase la figura). Es el puente entre la geometría sintética, basada en diagramas y dibujos, y la geometría analítica, que solo recurre a razonamientos numéricos.

Pero además de enunciar los axiomas, Hilbert fue pionero en ascender del nivel puramente matemático en que se estudia la geometría al nivel metamatemático o metageométrico, que se preocupa por las propiedades que debe cumplir todo sistema axiomático, en particular el que él estaba prescribiendo para la geometría. ¿Qué se puede pedir a los axiomas? Hilbert señaló tres propiedades: independencia, consistencia y completitud.

Un sistema de axiomas es independiente si ningún axioma puede deducirse de los otros, es decir, si el sistema de axiomas es el más económico posible porque no contiene redundancia alguna. Aunque no todos los axiomas que formuló eran independientes entre sí (como se descubrió más tarde), Hilbert demostró

AXIOMAS, DEMOSTRACIONES, TEOREMAS Y TEORÍAS

Desde una perspectiva axiomática, un axioma no es más que un enunciado que se coloca, por una u otra razón (en general, por su fertilidad), en la base de una teoría matemática para poder deducir teoremas a partir de él. Pero para poder deducir teoremas necesitamos una serie de *reglas de deducción* o *de inferencia* que nos digan cómo hacerlo. Los matemáticos usan habitualmente dos reglas clásicas. Una es el *modus ponens*, que consiste en deducir de la implicación «Si *P*, entonces *Q*» y de la verificación de *P*, que se da *Q*. Y otra es el *modus tollens*, que consiste en deducir de la implicación «Si P, entonces *Q*» y del hecho de que *Q* no se verifica, que tampoco lo hace *P*. De este modo, formalmente, una *demostración* o *prueba* es una cadena de razonamientos que permite obtener nuevos resultados aplicando los axiomas y las reglas de inferencia. Al resultado final de una demostración se le denomina *teorema*. Si a partir de un conjunto de axiomas *S* hemos podido deducir el teorema *T*, suele escribirse $S \vdash T$ («*T* es demostrable a partir de *S*»), donde el signo $\vdash$ representa la relación sintáctica de deducción o demostración. Finalmente, se llama *teoría* al conjunto de todos los teoremas que se pueden demostrar. Y se llama *modelo* de una teoría a una estructura matemática en que los axiomas son verdaderos, se satisfacen. Si *M* es un modelo del conjunto de axiomas *S*, se escribe $M \vDash S$ («*M* satisface *S*», es decir, «los axiomas *S* son verdad en M»). El signo $\vDash$ representa la relación semántica de verdad o satisfacción. Una de las preguntas fundacionales que se hará Hilbert es qué relación hay en matemáticas entre la relación de demostración y la relación de verdad (entre $\vdash$ y $\vDash$): ¿es verdadero todo lo demostrable?, ¿es demostrable todo lo verdadero?

la independencia entre los distintos grupos de axiomas. En concreto, demostró que el axioma de paralelas era independiente del resto de axiomas, es decir, que no podía deducirse a partir de ellos, con lo que cerró definitivamente una cuestión abierta desde hacía siglos. Esto lo logró empleando un método que muy pronto se volvió estándar: construyendo modelos de geometrías que satisfacen todos los axiomas deseados excepto aquel del cual se investiga su independencia, en cuyo caso este último no puede ser consecuencia de los otros (ya que si lo fuera, obtendríamos una contradicción: el axioma y su negación). Para demostrar la independencia del axioma de paralelas, construyó un modelo de geometría no euclídea. Y para demostrar la independencia del







FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Fotografía de David Hilbert en 1886.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Conjunto escultórico erigido en conmemoración de Gauss y Weber en Gotinga. Con ocasión de la inauguración de dicho monumento, Hilbert publicó los *Fundamentos de la geometría* (1899).

FOTO INFERIOR:
Postal que representa la Universidad de Köningsberg en torno a 1890, en la que Hilbert ingresó una década antes.

axioma de Arquímedes, construyó un modelo de geometría no arquimediana, donde existen magnitudes infinitesimales. De esta forma, Hilbert, al igual que Giuseppe Veronese (1845-1917), abrió las puertas del pensamiento a la exploración de otra nueva clase de geometría.

La segunda demanda que Hilbert hizo a su sistema axiomático es la consistencia. Un sistema de axiomas es consistente si no genera contradicciones, si no puede deducirse ninguna contradicción a partir de ellos. También se dice que el sistema de axiomas es, entonces, coherente o compatible. Los modelos de Beltrami, Klein, Poincaré y Riemann habían probado la consistencia relativa de las geometrías no euclídeas respecto de la euclídea, ya que estos modelos no euclídeos estaban contenidos dentro del propio espacio euclídeo. Pero, ¿era consistente la geometría euclídea? Hilbert demostró la consistencia de la geometría euclídea en relación a la aritmética, ofreciendo por vez primera un modelo puramente numérico. Construyó un conjunto de números que satisface todos los axiomas geométricos, donde los puntos son ciertos pares de números algebraicos; las rectas, ciertas ternas de esos números; donde la incidencia de una recta en un punto quiere decir que se verifica cierta ecuación numérica, etc. De este modo, cualquier inconsistencia en su sistema axiomático de la geometría desembocaría en una inconsistencia en la aritmética. Cualquier contradicción en las deducciones hechas a partir de los axiomas geométricos sería reconocida como una contradicción aritmética (por ejemplo, $0 = 1$).

En consecuencia, Hilbert redujo la consistencia de la geometría euclídea a la de la aritmética, que por aquel entonces daba por supuesta, aunque no tardó en reconocer que se trataba de un problema abierto al que inmediatamente asignó una alta prioridad (como tendremos ocasión de ver en el próximo capítulo). Era natural. Las geometrías no euclídeas descansaban sobre la euclídea, y esta última se apoyaba a su vez sobre la aritmética de los números reales. A la manera como en el sueño del sabio indio el mundo descansaba sobre un elefante, y el elefante sobre una tortuga. Pero, ¿y la tortuga? La pregunta por la consistencia de la aritmética se planteó enseguida en toda su agudeza. Hilbert no

LA INFLUENCIA DEL MALOGRADO HERTZ

Es muy probable que Hilbert no conociera bien los trabajos axiomáticos de la escuela italiana de Peano, aunque sí los de la escuela alemana, tanto en la corriente que se interesó por la geometría (Pasch) como en la que lo hizo por la mecánica. Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) murió cuando solo contaba treinta y siete años. Pero en ese breve lapso de tiempo deslumbró a sus contemporáneos como físico experimental (descubrió las ondas electromagnéticas y el efecto fotoeléctrico) y, al final de sus días, como físico teórico. En 1894 publicó *Los principios de la mecánica presentados de una forma nueva*, donde exponía axiomáticamente dicha ciencia. A su sistema axiomático le pedía dos requisitos: permisibilidad y corrección. La permisibilidad coincide con la consistencia, con la ausencia de contradicción. Y la corrección lo hace con la completitud, con que podamos demostrar dentro de la teoría todo lo que es verdadero en el mundo. Dos conceptos, como puede comprobarse, en estrecho paralelismo con los que introdujo David Hilbert.



Heinrich Rudolf Hertz alrededor de 1893.

la abordó en el libro, pero a estas alturas creía que la compatibilidad de los axiomas de la aritmética podría probarse de manera relativamente sencilla (¡cuán equivocado estaba!).

Por último, un tercer requerimiento que al cabo de pocos años Hilbert observó que debía pedirse, a ser posible, es la completitud (aunque apenas aparece esbozada en los *Grundlagen*). Un sistema axiomático es completo si podemos demostrar dentro del sistema todas las proposiciones que son verdad respecto de los objetos del sistema, es decir, si ninguna verdad escapa al poder de la demostración, si todas las verdades son demostrables. Mientras que la consistencia nos asegura que todo lo demostrable es cierto («todos los teoremas son verdad»), la completitud nos

garantiza lo recíproco: todo lo verdadero es demostrable («todas las verdades son teorema»). Si el sistema de axiomas que propuso para la geometría euclídea era completo, permitiría deducir todos los resultados conocidos y por conocer de la geometría euclídea.

No queremos adelantar acontecimientos, pero responder a esta cuestión no era baladí. Como explicaremos en el último capítulo, Hilbert acabaría descubriendo que cualquier sistema axiomático mínimamente interesante es incompleto. En él lo verdadero no coincide con lo demostrable. Hay proposiciones verdaderas que no pueden ser demostradas. Una situación paradójica que recuerda a la del detective de policía que sabe con certeza quién es el asesino pero no es capaz de probarlo. Por suerte, en 1951, el lógico polaco Alfred Tarski (1902-1983) demostró que una versión muy elemental de la geometría euclídea es completa —obviamente, esta versión no contiene a la aritmética, por lo que no viola los famosos teoremas de incompletitud de la aritmética de Kurt Gödel (1906-1978)—.

Recapitulemos. Tres son los requerimientos que Hilbert establece para su sistema de axiomas de la geometría: independencia, consistencia y completitud. El matemático alemán se planteó con acierto si su axiomática era minimal, demostrando en particular que el axioma de paralelas y el axioma de Arquímedes eran independientes del resto. Además, resolvió parcialmente la cuestión de la consistencia, probando la consistencia relativa de la geometría con respecto a la aritmética. En suma, sentó las bases sobre las cuales estudiar axiomáticamente cualquier geometría, euclídea o no euclídea, arquimediana o no arquimediana; y mostró cómo es posible derivar los resultados geométricos conocidos dependiendo de qué grupos de axiomas se admitan.

EL GRITERÍO DE LOS BEOCIOS

En una carta escrita a un colega matemático en 1829, Gauss manifestaba que no pensaba publicar nada en vida sobre geometría no euclídea por temor al «griterío de los beocios». Con esta expresión el matemático alemán aludía, sin duda alguna, a los filósofos kan-

tianos, para quienes la geometría euclídea era la única posible, dado que la unicidad del espacio implicaba la unicidad de la geometría. Un espacio físico, una geometría matemática. Gauss se guardó de publicar sus resultados por miedo al escándalo, ya que el descubrimiento de las geometrías no euclídeas constituía un motivo muy serio para poner en cuestión toda la filosofía kantiana. Si había más de una geometría lógicamente concebible, preguntar por la verdad de una en concreto era como preguntar si el sistema de numeración decimal es más verdadero que el binario, o si el sistema de coordenadas cartesiano lo es más que el polar. La relatividad de la geometría apuntaba, contra las ideas de Kant, a que el espacio era amorfo y carece de sentido preguntar qué geometría es la verdadera. No fue Gauss el único matemático que sintió cierta antipatía por Kant, el gran filósofo paisano de Hilbert. Georg Cantor confesaba que su lectura le ponía enfermo y se refería al sabio prusiano como «aquel sofístico filisteo que sabía tan poco de matemáticas».

Al igual que Gauss, Hilbert tuvo sus más y sus menos con un filósofo, como consecuencia de las ideas expuestas en los *Fundamentos de la geometría*. En este caso, con el lógico y filósofo Gottlob Frege (1848-1925). Este oscuro profesor de la Universidad de Jena fue (como veremos en el capítulo 4) el padre de la lógica moderna, pero también uno de los más conspicuos defensores del enfoque axiomático de los antiguos. La reacción de Frege tras una atenta lectura del libro de Hilbert no se hizo esperar. Dio inicio a una correspondencia y a un sinfín de malentendidos.

En su primera carta, fechada a finales de 1899, Frege sometía el libro a una crítica dura y algo pedante. Irritado, pero armándose de paciencia, Hilbert respondió con otra prolija misiva. Sin embargo, a partir de ese momento, se limitó a hacerlo escuetamente, y cuando Frege le propuso publicar el intercambio epistolar, se negó en redondo. No obstante, la polémica encierra gran interés, por cuanto muestra el choque frontal entre dos concepciones del método axiomático: la antigua o tradicional, representada por Frege, y la nueva iniciada por Hilbert.

Frege jamás cuestionó el análisis kantiano de la geometría, y no concebía más método axiomático que el que Aristóteles describiera en los *Analíticos posteriores* y Euclides ejercitara en los

Elementos. Los axiomas eran verdades evidentes entresacadas de la realidad. En consecuencia, el axioma de paralelas era verdad o no lo era. Pero no podía ser ambas cosas a la vez. En una de sus cartas, el filósofo alemán escribía:

> Nadie puede servir a la vez a dos señores: si la geometría euclídea es verdadera, entonces hay que echar a la geometría no euclídea fuera de la lista de las ciencias y colocarla junto a la alquimia y la astrología.

Su postura retrógrada le impidió comprender que para Hilbert los axiomas no eran más que esquemas abstractos que se situaban pragmáticamente como principios de la teoría matemática. Y no eran, ni mucho menos, inamovibles.

Pero el disgusto de Frege fue aún mayor cuando leyó que Hilbert estaba dispuesto a llamar «puntos», «rectas» y «planos» a cualesquiera tres conjuntos arbitrarios que satisficieran sus axiomas, aunque fueran mesas, sillas y jarras de cerveza. Para Frege los axiomas hablaban de cosas reales y, por tanto, difícilmente podían tener más de una interpretación posible. Hilbert volvió a reiterarle su posición por carta:

> Cada teoría no es sino un tinglado de conceptos junto con ciertas relaciones necesarias entre ellos, y sus elementos básicos pueden ser pensados arbitrariamente. Si entiendo por puntos, etc., cualquier sistema de cosas, por ejemplo el sistema formado por amor, ley, deshollinador, etc., y considero que todos mis axiomas son válidos para esas cosas, entonces resultan válidos para esas cosas mis teoremas, como, por ejemplo, el de Pitágoras. Con otras palabras: cada teoría puede ser aplicada a una infinidad de sistemas de elementos básicos.

Para cuando Frege publicó un par de largos artículos tildándole de *Doctor Matasanos*, Hilbert replicó por mano de Alwin Korselt (1864-1947), mostrando de nuevo su concepción de la matemática: «Podemos, pues, llamarla también "juego de signos vacío, carente de significado" y cosas por el estilo; como precisa asociación legal de proposiciones no precisa de ninguna otra dignidad especial».

Curiosamente, otro que tampoco se encontraba cómodo con este uso de los términos que aparecen en los axiomas como palabras vacías que expresan generalidad fue Henri Poincaré. El matemático francés se sumó al carro de las críticas al libro de Hilbert, ya que detestaba a quienes querían reducir las matemáticas a meras relaciones formales entre símbolos. Escribió una larga reseña en la que acusaba al matemático alemán de tramposo, porque el método axiomático nunca es creador. No es un instrumento conceptualizador original, pues disfraza y oculta lo que se quiere axiomatizar. Según Poincaré, Hilbert tenía siempre presente la geometría euclídea en sus *Fundamentos de la geometría*, aunque lo negara. Su axiomática, aunque pretenda ser enfocada como una serie de definiciones implícitas, parte ya de una teoría existente y se limita meramente a reorganizarla. El titán francés salió al paso, una vez más, del titán alemán.

Mucho menos comprendió Frege el interés de Hilbert por el axioma de plenitud lineal o de continuidad de la recta, que establecía que no existía otro sistema mayor de objetos que también obedeciera a los axiomas. El filósofo se quejó con rudeza al matemático de que era como hacer teología con un axioma que dijera: «Axioma 3. Existe al menos un Dios». No deja de ser irónico que fuera la segunda vez que el enfoque hilbertiano recibía la acusación de teológico. Pero más que un teólogo, Hilbert era un místico, capaz de adivinar el futuro y otear el rumbo que tomarían las matemáticas.

La polaridad entre Frege y Hilbert, como entre Gordan y él, es crucial para entender en qué se diferencian las matemáticas del siglo XIX de las del siglo XX. Para Frege la existencia matemática tenía que ver con qué objetos materiales o ideales existen en el mundo. Así, como hay solo un mundo, tiene que haber una única geometría. Los sistemas axiomáticos venían, en principio, vacíos. En cambio, Hilbert mantenía la opinión radicalmente opuesta. Los axiomas no solo codifican el comportamiento de los objetos matemáticos, sino que también pueden crear objetos matemáticos nuevos si no incurren en contradicción. En consecuencia, uno tiene más de una geometría en matemáticas, dado que cada una de ellas es consistente (en relación a la aritmética).

Los *Grundlagen* fueron el broche perfecto a la edad heroica de la geometría, abriendo el camino a toda una panoplia de geometrías (las no euclídeas, las no arquimedianas, etc.). Fueron, además, el primer hito en la corriente axiomatizadora moderna. Desde 1900, pertrechado con su nuevo método, Hilbert impulsaría la axiomatización del resto de disciplinas científicas. Si la axiomática había funcionado tan bien en geometría, ¿por qué no iba a hacerlo en la aritmética, el análisis o la física?

CAPÍTULO 2

El desafío de Hilbert

La sombra de Hilbert es alargada y se proyecta sobre gran parte del hacer matemático del siglo XX. Cuando el 8 de agosto de 1900 subió a la tribuna y tomó la palabra en el II Congreso Internacional de Matemáticos, Hilbert condensó los retos futuros a los que debía enfrentarse la matemática en veintitrés problemas, influyendo decisivamente en la evolución de la disciplina. Estaba levantando el velo tras el que se ocultaba el futuro de las matemáticas.

Corría el año de 1900. Un nuevo siglo comenzaba. Mientras cientos de parisinos se debatían entre recorrer los pabellones de la Exposición Universal o asistir a las competiciones de los Juegos Olímpicos, David Hilbert tomaba la palabra en la Universidad de la Sorbona, con ocasión del II Congreso Internacional de Matemáticos. No iba a hablar de lo que había demostrado, sino de lo que quedaba por demostrar. Lo hacía en calidad de ser uno de los mejores matemáticos de su generación y líder de la escuela matemática radicada en Gotinga. Y aunque su charla no era una conferencia plenaria, ya que Hilbert se había demorado demasiado a la hora de enviar un título y los organizadores habían tenido que excluirla del programa, estaba llamada a ser la ponencia más recordada del congreso.

A sus treinta y ocho años, David Hilbert había ya demostrado el brío de sus ideas. Tras revolucionar la teoría de invariantes con un inédito salto de abstracción, había incursionado en la teoría de números y en la geometría axiomática, dejando a su paso obras que se convertirían en clásicos de ambas disciplinas. Consciente de ser uno de los matemáticos más destacados, quería demostrar su penetrante visión de conjunto de las matemáticas. Podemos imaginar a nuestro matemático ese caluroso 8 de agosto de 1900. Alto, enjuto, con la barba recortada, y acompañado de sus inconfundibles anteojos, se dirigió al estrado y tomó la palabra. Lo hizo

para subrayar que el motor del progreso en matemáticas era la resolución de problemas y para emplazar a los matemáticos del siglo XX a resolver veintitrés cuestiones escogidas.

HILBERT FRENTE A POINCARÉ

El I Congreso Internacional de Matemáticos se había celebrado en Zúrich tres años antes, en 1897. El matemático francés Henri Poincaré había sido la estrella del encuentro, con su conferencia «Sobre las relaciones entre el análisis puro y la física matemática». A resultas de ello, ahora era el presidente del comité organizador. En París Hilbert quería demostrar su valía rivalizando con el patrón de la matemática francesa. Al igual que Klein, ansiaba recuperar el predominio, el prestigio para los matemáticos alemanes. Pero albergaba serias dudas acerca de cómo lograrlo. En consecuencia, tardó más de la cuenta en elegir un tema para la conferencia.

En su discurso, Poincaré había expuesto un programa marco para el desarrollo de las matemáticas. Esta ciencia posee un triple fin. Un fin físico, consistente en proporcionar un instrumento adecuado para el estudio de la naturaleza. Un fin filosófico, ayudar al filósofo a profundizar en las nociones de número, espacio y tiempo. Y, finalmente, un fin estético, comparable a la música o la pintura. Las matemáticas, añadía, merecen ser cultivadas en sí mismas, no solo por sus aplicaciones, puesto que sin teoría la investigación práctica y el progreso se estancan. Pero la mejor opción se da cuando los fines físico y estético son solidarios. A lo largo de su charla, Poincaré se esforzó por mostrar en detalle la relación entre la ciencia pura y sus aplicaciones, entre el análisis y la física.

Este entorno programático encontraría una respuesta frontal en los veintitrés problemas futuros de las matemáticas dados a conocer por Hilbert. Ambos matemáticos se conocían y se admiraban, pero su concepción de las matemáticas era muy distinta. El matemático alemán defendió el valor de la matemática pura en sí

misma, sin contaminación. Aunque buena parte de su carrera en los siguientes veinte años permanecería ligada a la física, quería rebatir algunas de las ideas de su homólogo francés. Según era su costumbre consultó con su amigo Minkowski, quien le escribió a pocos meses de su participación en el congreso:

> He releído la conferencia de Poincaré y encuentro que todas sus afirmaciones están expresadas de un modo tan vago que no se pueden contradecir [...]. Más atractivo sería que intentes mirar hacia el futuro, enumerando los problemas a los cuales deberían dedicarse los matemáticos en adelante. Así podrías crear las circunstancias para que se siga hablando de tu charla en las décadas venideras. Eso sí, debes tener en cuenta que la profecía tiene sus dificultades.

Siguiendo su consejo, las primeras palabras que pronunció Hilbert en París componían una hermosa batería de preguntas al respecto:

> ¿Cuáles serán los objetivos concretos por los que se esforzarán las mejores mentes matemáticas de las próximas generaciones? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos nos depararán las centurias por venir en el amplio y rico campo del pensamiento matemático?

El *leitmotiv* de su discurso fue revalorizar la matemática pura a través de los problemas que ella misma se propone. A su entender, mientras las matemáticas ofrezcan abundancia de problemas, estarán vivas y efervescentes. Es la falta de problemas lo que pronostica la extinción o desaparición de una rama de la ciencia. Las ciencias avanzan resolviendo problemas. Pero, ¿qué características debería reunir un buen problema matemático? Para empezar, debería ser fácil de enunciar y explicar, y, además, difícil de resolver, aunque no imposible, para no frustrar los esfuerzos.

Pero hay más, Hilbert aprovechó esta oportunidad inigualable para divulgar su fe en la centralidad del método axiomático como vehículo de definición de los conceptos matemáticos. Mientras que para Poincaré la intuición y las analogías físicas jugaban un papel esencial, para Hilbert lo hacía la lógica más es-

tricta: el rigor y la simplicidad. Como explicamos en el capítulo anterior, el último tercio del siglo XIX asistió a la constitución de un nuevo modo de hacer en matemáticas, con una inversión radical respecto al hacer matemático anterior. La noción de estructura abstracta, incluyendo aquí la de conjunto, se convirtió en un nuevo punto de partida, ligado a una nueva forma de definición, como la implícita por axiomas. Asimismo, aparecieron nuevos métodos de demostración, como los indirectos o existenciales, y nuevos modos de expresión, que requerían el uso de lenguajes formales. Una revolución que se fue imponiendo entre los matemáticos, aunque no sin vueltas del revés, y que debe mucho al matemático alemán.

A lo largo de la charla, Hilbert reiteró su concepción de la existencia matemática: si puede demostrarse que los atributos asignados a un concepto no conducen nunca a una contradicción, entonces el concepto en cuestión existe matemáticamente. Una afirmación tajante que tuvo que resultar chocante a oídos de muchos de sus colegas. También afirmó que al investigar los fundamentos de una ciencia debía postularse un sistema de axiomas que contuviera una descripción exacta de las relaciones básicas entre las ideas elementales de esa ciencia. Los axiomas así postulados serían a la vez las definiciones de dichas ideas elementales, y ninguna proposición de la ciencia bajo examen sería considerada verdadera a menos que fuera derivable de los axiomas en un número finito de pasos lógicos.

Además, en el preámbulo filosófico a su lista de problemas, Hilbert se opuso —al igual que ya hiciera Poincaré— a la corriente escéptica, iniciada por el fisiólogo Emil du Bois-Reymond (1818-1896) y secundada por el físico Pierre Duhem (1861-1916), que tan en boga estaba en la época. Para estos autores, la ciencia estaba llegando a su límite, de modo que había cierto tipo de cuestiones que, según la máxima acuñada por Du Bois-Reymond en 1872, «ignoramos e ignoraremos» *(«Ignoramus, ignorabimus!»)*. Por contra, Hilbert apuntaba con optimismo que todo problema matemático era resoluble, en el sentido de admitir una respuesta positiva o negativa. Esta era una de sus convicciones más íntimas y un poderoso acicate en su trabajo diario:

En nuestro interior escuchamos la perpetua llamada: he ahí un problema. Busca su solución. Puedes hallarla por medio de la razón porque en matemáticas no existe el *ignorabimus*.

Desafortunadamente, no sería así. Como es sabido esa es una de las ideas que en los años treinta recibió un fuerte golpe.

EL RETO DE HILBERT

La lista de problemas matemáticos que Hilbert propuso contenía un total de veintitrés, aunque por limitaciones de tiempo solo mencionó diez de ellos en su charla. No obstante, facilitó a los asistentes una copia impresa del texto completo, que enseguida fue publicado tanto en Alemania como en Francia, lo que amplió su conocimiento y difusión. A continuación vamos a enunciar los veintitrés problemas, aunque solo vamos a describir algunos (los más simples y menos técnicos), ya que una exposición detallada de cada uno nos llevaría demasiado lejos.

Los problemas pueden agruparse en varios bloques, dependiendo de la materia que tratan: fundamentos de las matemáticas (a saber, los problemas 1, 2, 3, 4 y 5) y de la física matemática (problema 6), teoría de números (problemas 7, 8, 9, 10 y 11), álgebra (12, 13, 14 y 17), geometría (15, 16 y 18) y análisis (19, 20, 21, 22 y 23). Los fundamentos de la matemática, la geometría y el álgebra desde distintos ángulos, la teoría de números y el análisis están representados en la lista, junto con otros asuntos de más esquiva clasificación.

Dentro del primer bloque nos encontramos con los problemas de fundamentos de la matemática y de la física:

1. El problema del continuo (cuya explicación posponemos al capítulo 4). Baste por ahora contar que se trataba de probar la verdad o la falsedad de la famosa *hipótesis del continuo* de Cantor, que afirmaba que no existe un subconjunto de la recta real cuyo cardinal (su tamaño, para entendernos de

momento) esté estrictamente entre el de los números racionales y el de los números reales. Al proponer esta cuestión como primer problema matemático del futuro, Hilbert estaba tomando partido y apostando decididamente por la teoría abstracta de conjuntos frente a sus opositores, que no eran pocos.

2. El problema de la consistencia de los axiomas de la aritmética. Esta cuestión, como vimos en el capítulo anterior, era fundamental, porque una respuesta positiva probaría de forma indirecta la consistencia de toda la matemática. En los *Fundamentos de la geometría*, Hilbert había dejado aparcado este problema, pero volvió a él en sus últimos años como investigador, a partir de 1920, como explicaremos en el último capítulo. Por desgracia, el lógico austriaco Kurt Gödel demostró en 1931 que este problema era formalmente indecidible. No es posible probar la consistencia de los axiomas de la aritmética.

3. La igualdad de los volúmenes de dos tetraedros de igual base y altura. En su libro, Hilbert se había preocupado por definir el concepto de área en geometría plana sin recurrir al cálculo infinitesimal (a las integrales) y lo había logrado caracterizando los polígonos de igual área como aquellos que son equicomplementables (esto es, simplificando, que se descomponen en el mismo número de triángulos iguales). ¿Era posible hacer lo mismo para el concepto de volumen en geometría espacial? ¿Sería posible caracterizar los poliedros de igual volumen como aquellos que pueden descomponerse en el mismo número de tetraedros iguales? En 1902, Max Dehn (1878-1952) respondió negativamente: existen dos tetraedros de igual base y altura (por tanto, de igual volumen) que, sin embargo, no son equicomplementables. No es posible cortar el primero en una cantidad finita de piezas poliédricas que puedan ensamblarse de modo que quede armado el segundo. Mientras que en dos dimensiones era posible evitar un complicado proceso



FOTO SUPERIOR:
El Club de Matemáticas de Gotinga en 1902. En el centro, Klein, fundador del club, con Hilbert a su derecha y un puñado de colegas y jóvenes discípulos.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
El matemático ruso Hermann Minkowski en un retrato de juventud. Hilbert mantuvo con él una profunda amistad hasta la muerte de aquel en 1909.

FOTO INFERIOR DERECHA:
Hilbert con su mujer, Khäte Jerosch, con la que contrajo matrimonio en 1892.





de paso al límite conocido como *la escalera del demonio* y de ese modo definir el área sin emplear el cálculo, en tres dimensiones este proceso se mostró imprescindible, lo que impedía definir la noción de volumen sin recurrir al análisis.

4. El problema de la línea recta como la distancia más corta entre dos puntos. Hilbert propone que se continúe la investigación de las distintas geometrías axiomáticas posibles, prestando atención a qué grupo de axiomas permite deducir el resultado que afirma que en un triángulo cualquiera la suma de dos de sus lados es siempre mayor que el tercero y, por consiguiente, la línea recta es el camino más corto entre dos puntos. Aunque este problema tiene una formulación un poco vaga, adquirió una más precisa en el ámbito de la geometría riemanniana, donde se trataba de construir todas las distancias posibles de forma que las líneas rectas ordinarias fuesen geodésicas (los caminos más cortos).

5. Análisis del concepto introducido por Sophus Lie (1842-1899) de grupo de transformaciones sin incluir la hipótesis de diferenciabilidad de las funciones que componen el grupo.

6. Tratamiento matemático de los axiomas de la física. Hilbert estaba realmente interesado en la axiomatización de las distintas ramas de la física (en especial, de la mecánica y del cálculo de probabilidades, que en la época pasaba por ser la herramienta más potente de la termodinámica) a fin de conferirles un formato similar al de la geometría, a la que consideraba una suerte de ciencia casi empírica. Era un problema en cuya resolución ya se había avanzado gracias al trabajo de físicos como E. Mach (1838-1916) y H. Hertz, pero en el que los matemáticos aún no habían colaborado. Este programa de axiomatización de la física obtendría (como veremos en el próximo capítulo) algunas victorias parciales en las primeras décadas del siglo XX.

Por su parte, dentro del bloque de teoría de números, Hilbert apuntó cinco problemas:

7. Irracionalidad y trascendencia de ciertos números. Un número trascendente es un tipo de número irracional, aquel que no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Por el contrario, un número algebraico es cualquier número que es solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Como todavía no se conocían muchos números trascendentes (aparte de π y e), Hilbert planteó una cuestión muy concreta: si a es un número algebraico (distinto de 0 y 1) y b es un número algebraico irracional, ¿es a^b un número trascendente? Para Hilbert este era uno de los problemas más difíciles de la lista. No obstante, en 1934, A.O. Gelfond (1906-1968) y T. Schneider (1911-1988) demostraron que así era. En particular, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es trascendente.

8. Estudio de los números primos. Aquí Hilbert planteó una serie de cuestiones enlazadas con la distribución de los números primos. La principal es, desde luego, la célebre hipótesis de Riemann, que establece que una cierta función relacionada con estos números, y denominada función zeta de Riemann $\zeta(z)$, tiene todos sus ceros en la recta $\mathrm{Re}(z) = 1/2$ del plano complejo, es decir, todos sus ceros son números complejos con parte real igual a 1/2. A día de hoy sigue sin demostración, aunque mediante ordenador se ha probado que los primeros 1,5 billones de ceros cumplen la hipótesis. Pero también mencionó la conjetura de Goldbach (según la cual todo número par puede expresarse como suma de dos números primos), la existencia de infinitos primos gemelos (es decir, de primos cuya diferencia es 2), etcétera.

9. Demostración de la ley de reciprocidad más general en cualquier cuerpo de números.

10. Determinación de la resolubilidad de las ecuaciones diofánticas.

EL DÉCIMO PROBLEMA DE HILBERT

Este es uno de los grandes problemas. Parece engañosamente simple, pero no lo es. Se trata de buscar algún procedimiento general que permita averiguar si una ecuación diofántica tiene o no soluciones enteras, sin necesidad de calcularlas. Una ecuación diofántica es una ecuación en la que solo interviene un polinomio con coeficientes enteros y se desean conocer todas las soluciones enteras. Recibe su nombre por el matemático griego Diofanto (siglo III d.C.), que se interesó por ellas. En particular, la famosa ecuación $x^n+y^n=z^n$ del último teorema de Fermat es una ecuación diofántica —en 1995, Andrew Wiles (n. 1953) logró demostrar que la ecuación no tiene soluciones enteras diferentes de cero cuando n es mayor que 2—. El problema permaneció abierto durante setenta años, hasta que en 1970 la teoría de números y la lógica matemática se dieron la mano: el matemático soviético Yuri Matijasevich (n. 1947), siguiendo ideas desarrolladas por Martin Davis (n. 1928), Hilary Putnam (n. 1926) y Julia Robinson (1919-1985), logró demostrar que no existe tal algoritmo. Esta última, convaleciente de una afección cardiaca, solía pedir en sus cumpleaños el siguiente deseo: «Que alguien resuelva el décimo problema de Hilbert. No podré descansar hasta que alguien dé con la respuesta». Curiosamente, su hermana mayor, Constance Reid (1918-2010), escribió la que pasa por ser la mejor biografía de David Hilbert.

11. Estudio de las formas cuadráticas con coeficientes algebraicos cualesquiera.

En el bloque de álgebra:

12. Extensión del teorema de Kronecker sobre cuerpos abelianos a cualquier dominio de racionalidad algebraico.

13. Imposibilidad de resolver la ecuación general de séptimo grado por medio de funciones de solo dos argumentos.

14. Demostración de la finitud de ciertos sistemas completos de funciones.

17. Expresión de formas definidas por sumas de cuadrados.

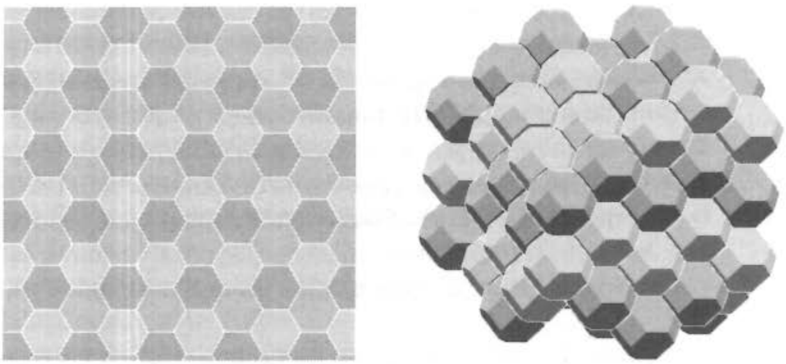
En el bloque de geometría:

15. Fundamentación rigurosa del cálculo enumerativo de H. Schubert (1848-1911).

16. Estudio de la topología de curvas y superficies algebraicas, incluyendo aquí —en lo que significaba un guiño a la obra de Poincaré— el estudio del número y la forma de los ciclos límite solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

18. Construcción del espacio a partir de poliedros congruentes. Este problema es uno de los clásicos de la matemática. Conocido como el problema del teselado o del friso, consiste en determinar de cuántas formas diferentes puede rellenarse por completo el plano con figuras geométricas idénticas. Hilbert lo amplió al considerar la posibilidad de rellenar el espacio con poliedros congruentes (véase la figura). Se trataba, por tanto, de generalizar el estudio ya hecho de los grupos de simetría y las teselaciones —muchas de ellas representadas en los mosaicos de La Alhambra— del plano bidimensional al caso del espacio tridimensional. Avances intermedios en esta materia se produjeron en 1910 de manos de Ludwig Bieberbach (1886-1982), un matemático

Izquierda, teselación del plano mediante hexágonos. Derecha, teselación del espacio usando octaedros truncados.



que terminaría afiliándose al Partido Nazi y tomando el relevo de Hilbert. Además, dentro de este apartado, Hilbert incluyó la famosa conjetura de Kepler: ¿qué disposición de esferas del mismo radio deja menos hueco libre en el espacio? Kepler conjeturó que la manera en que el frutero coloca las naranjas es la solución correcta —como de hecho muy recientemente se ha demostrado gracias a Thomas C. Hales (n. 1958)—.

Y, finalmente, dentro del bloque dedicado al análisis, se encontraban los últimos cinco problemas:

19. Estudio de la analiticidad de las soluciones de los problemas regulares del cálculo de variaciones.

20. Estudio de la existencia de soluciones de los problemas del cálculo de variaciones con valores de contorno.

21. Demostración de la existencia de ecuaciones diferenciales lineales con grupo de monodromía prefijado.

22. Uniformización de relaciones analíticas por medio de funciones automorfas (un problema cuyo origen estaba en los trabajos de Klein y Poincaré al respecto).

23. Extensión de los métodos del cálculo de variaciones. Como veremos en el próximo capítulo, Hilbert contribuyó notablemente al progreso de esta área del análisis (que estaba directamente relacionada con los problemas 19 y 20, que se interesan por la existencia, la unicidad y las propiedades de las soluciones del cálculo de variaciones). Un tema que ha tenido una vitalidad extraordinaria en el siglo XX, lo que demuestra el buen olfato de Hilbert al terminar la lista de problemas con una cuestión general acerca de este campo.

En París, por limitaciones de tiempo, Hilbert solo pudo discutir diez de sus veintitrés problemas: la hipótesis del continuo

(problema 1); la consistencia de la aritmética (2); la axiomatización de teorías físicas (6); varios problemas de teoría de números, incluyendo la hipótesis de Riemann (7 y 8); la imposibilidad de resolución de la ecuación de séptimo grado (13); una cuestión sobre curvas y superficies definidas por ecuaciones polinómicas (16); las soluciones analíticas de los problemas regulares en el cálculo de variaciones (19); la existencia de ecuaciones diferenciales ordinarias que correspondan a grupos monodrómicos dados (21), y una cuestión de Poincaré sobre la parametrización de curvas algebraicas por medio de funciones automorfas (22).

> «Si despertara después de haber dormido durante mil años, la primera pregunta que haría sería: ¿se ha demostrado la hipótesis de Riemann?»
>
> — David Hilbert.

Muy recientemente, el historiador de la matemática Thiele Rudiger ha descubierto en un cuaderno de notas que Hilbert tenía la intención de añadir un nuevo problema, es decir, el número 24, que finalmente descartó. El problema iba a consistir en lo siguiente: determinar criterios para la simplicidad o la demostración de la máxima simplicidad de ciertas demostraciones. Hilbert buscaba desarrollar una teoría general sobre los métodos de demostración en matemáticas. Paradójicamente, algunos años después, él mismo fundaría (como estudiaremos en el capítulo 5) una teoría de la demostración.

Hubo, sin embargo, algunos olvidos importantes en la lista. Varios caminos no seguidos. El álgebra matricial, la estadística, la lógica o la matemática aplicada, que habían sufrido un intenso desarrollo a finales del siglo, junto a una topología, una teoría de la medida y un análisis funcional en gestación, fueron marginados por Hilbert en su presentación. Exactamente igual que el problema de los tres cuerpos o el último teorema de Fermat, que fueron mencionados pero no propuestos como problemas abiertos de la matemática del futuro.

La siguiente tabla recoge el estado actual de los veintitrés problemas de Hilbert:

Problema	Descripción	Estado
1	La hipótesis del continuo	Kurt Gödel (1938) y Paul Cohen (1963) demostraron la imposibilidad de probarla como cierta o falsa a partir de los axiomas estándar de la teoría de conjuntos.
2	Consistencia de la aritmética	Kurt Gödel (1931) demostró que establecer la consistencia de la aritmética es un problema formalmente indecidible.
3	Definición de la noción de volumen sin emplear el cálculo	Resuelto negativamente por Dehn (1902).
4	Construcción de todas las métricas cuyas rectas sean geodésicas	Resuelto positivamente por Pogorelov (1975).
5	¿Son los grupos continuos diferenciables de forma automática?	Resuelto en sentido positivo por Andrew Gleason (1952).
6	Axiomatización de la física	Parcialmente resuelto: — Mecánica: Hamel (1909). — Termodinámica: Carathéodory (1909). — Relatividad especial: Robb (1914) y Carathéodory (1923). — Mecánica cuántica: Von Neumann (1932). — Teoría de la probabilidad: Kolmogórov (1933).
7	¿Es a^b trascendental, siendo $a \neq 0,1$ algebraico y b irracional algebraico?	Resuelto de forma independiente por Gelfond y Schneider (1934).
8	La hipótesis de Riemann y la conjetura de Goldbach	Abierto.
9	Encontrar la ley de reciprocidad más general en cualquier cuerpo numérico	Resuelto por Emil Artin (1923).
10	Encontrar un algoritmo que determine si una ecuación diofántica tiene soluciones enteras	Resuelto en sentido negativo por Matijasevich (1970).

Problema	Descripción	Estado
11	Resolver las formas cuadráticas con coeficientes numéricos algebraicos	Parcialmente resuelto: Hasse (1923) y Siegel (1930).
12	Extensión del teorema de Kronecker	Abierto.
13	Resolución de la ecuación general de séptimo grado por medio de funciones de dos argumentos	Resuelto negativamente por Arnold y Kolmogórov (1957).
14	Demostración de la finitud de ciertos sistemas completos de funciones	Resuelto en sentido negativo, mediante un contraejemplo, por Nagata (1959).
15	Fundamentación rigurosa del cálculo enumerativo de Schubert	Resuelto por Van der Waerden (1930).
16	Topología de las curvas y superficies algebraicas	Abierto.
17	Expresión de formas definidas por cuadrados	Resuelto en sentido positivo por Emil Artin (1927) y Georg Kreisel (1957).
18	Conjetura de Kepler	Resuelto por Hales (2005).
19	¿Son siempre analíticas las soluciones de los problemas regulares del cálculo de variaciones?	Resuelto afirmativamente por Bernstein (1904).
20	¿Tienen solución todos los problemas variacionales con ciertas condiciones de contorno?	Resuelto a lo largo del siglo XX.
21	Probar la existencia de ecuaciones diferenciales lineales que tengan un grupo monodrómico prescrito	Resuelto de forma negativa por Anosov y Bolibruch (1989).
22	Uniformización de relaciones analíticas por medio de funciones automorfas	Resuelto independientemente por Koebe y Poincaré (1907).
23	Extensión de los métodos del cálculo de variaciones	Resuelto a lo largo del siglo XX.

LOS DIECIOCHO PROBLEMAS DE SMALE Y LOS SIETE PROBLEMAS DEL MILENIO

En 1992 la Unión Matemática Internacional tomó la iniciativa de adaptar la conferencia de Hilbert de 1900 al desarrollo actual de las matemáticas. A pesar de los tremendos logros de las matemáticas del siglo XX, docenas de problemas notables aún esperan solución. Stephen Smale (n. 1930, ganador de la Medalla Fields, el equivalente al premio Nobel para matemáticos) planteó en el año 2000 una lista con dieciocho problemas para el siglo XXI. Los tres primeros son la hipótesis de Riemann, la conjetura de Poincaré (una famosa cuestión topológica planteada en 1904) y el problema $P=NP$ (¿tiene todo problema resoluble en tiempo exponencial, no polinómico, una resolución alternativa en tiempo polinómico?). Simultáneamente, el Instituto Clay instauró siete premios de un millón de dólares para cada uno de los denominados problemas del milenio. Algunos son nuevos, otros viejos conocidos, que llevan más de cien años esperando una solución. Entre estos desafíos están, como es natural, los tres ya citados, así como el problema de la existencia de soluciones en las ecuaciones de Navier-Stokes (que describen el movimiento de los fluidos). En 2002 el matemático ruso Grigori Perelman (n. 1966) demostró uno de ellos, la conjetura de Poincaré; pero, sorprendentemente, rehusó recoger el premio alegando que no quería ser expuesto como un animal en el zoológico.

EL MAESTRO Y LOS DISCÍPULOS

Hoy, más de cien años después, el balance es altamente positivo: más de la mitad de los problemas han sido resueltos, aunque algunos no de la forma esperada. Otros, los menos, siguen abiertos (caso del problema 8: la hipótesis de Riemann, la estrella de la lista) o parcialmente abiertos (caso de los problemas 11, 12 y 16). Los problemas que Hilbert encomendó al nuevo siglo no cayeron en saco roto, sino que fascinaron a varias generaciones de matemáticos, generando un verdadero aluvión de artículos de investigación. Resolver un problema de Hilbert era una tarea digna de respeto, que ayudaba a forjar una carrera. Cualquier matemático que resolviera uno solo de los problemas ingresaba con ello en «la clase de honor de la comunidad matemática», por decirlo con

la expresión que acuñó Hermann Weyl (1885-1955) en su escrito necrológico sobre Hilbert.

Fue un bello caso de profecía autocumplida. Pese a que la conferencia de Hilbert no logró arrastrar a muchos asistentes (de hecho, no se sabe a ciencia cierta si ni siquiera Poincaré, implícitamente aludido, acudió) ni generó un debate animado (apenas un rifirrafe con Peano, que recordó a Hilbert los trabajos de los matemáticos italianos en relación al segundo problema), la reputación de su autor y la del claustro de Gotinga que tenía detrás hicieron el resto. Los problemas matemáticos del futuro fueron precisamente los que Hilbert marcó en la agenda porque su aura legendaria influyó para que fuera así. De todos modos, las propuestas de Poincaré también se cumplieron: a modo de ejemplo, el desarrollo del análisis funcional, que tanto debe a Hilbert, se produjo en paralelo al de la mecánica cuántica. Y, pasada la tendencia de principios del siglo XX hacia la abstracción y las estructuras axiomáticas, se ha vivido un despegue de la matemática aplicada (investigación operativa, teoría del caos, etc.) que ha devuelto parte de la razón al matemático francés.

Hilbert imprimió su sello sobre toda una era de las matemáticas. Y, sin embargo, no basta su investigación para explicar el brillo que irradiaba. Gauss y Riemann, por mencionar otros dos hombres de Gotinga, fueron matemáticos de más talla que Hilbert, pero su impacto inmediato sobre sus contemporáneos fue indudablemente menor. Hilbert, cual Flautista de Hamelin, sedujo a múltiples matemáticos a seguirle al profundo río de las matemáticas puras. El éxito de los problemas de Hilbert como programa de investigación radica también en el círculo que logró crear a su alrededor. Con otras palabras, no es posible hacer un balance serio de su influencia si no se toma en cuenta que siempre destacó por ser un profesor de lo más laborioso. Hilbert destilaba un entusiasmo contagioso por intercambiar ideas científicas, a través de conversaciones o en largas caminatas. La piedra angular de su actividad matemática fue combinar investigación y enseñanza. Otto Blumenthal (1876-1944), el primero de los sesenta y nueve alumnos que acabaron una tesis doctoral bajo su dirección, rememoraba cuarenta años después la impresión que Hilbert causó cuando llegó a Gotinga:

Comparado con los demás profesores, aquel hombre ágil con su poblada barba pelirroja y un atuendo bastante normal tenía un aire poco académico. Sus clases eran muy concisas. Las daba de una forma un poco aburrida, pero el rico contenido y la claridad de su presentación hacían que uno se olvidara de la forma. A menudo presentaba cosas nuevas que él mismo había descubierto, pero se tomaba la molestia de comprobar que todo el mundo le seguía. Daba las clases para los alumnos, no para sí mismo.

RETRATO DE HILBERT CON SOMBRERO



Esta fotografía, tomada en 1912, ha pasado al imaginario colectivo de los matemáticos. Sombrero panamá, ojos brillantes tras los anteojos, barba puntiaguda, voz que se adivina firme. Pero hay algo que este celebérrimo retrato no trasluce: la personalidad cautivadora de su protagonista. Una pasión inquebrantable por las matemáticas que se palpa en la florida retórica de sus discursos. Y muchas de esas excentricidades que habitualmente identificamos con los matemáticos. Uno de sus discípulos contaba que un día tras otro se veía a Hilbert con los mismos pantalones rotos, lo cual era un poco embarazoso. La tarea de informarle con delicadeza recayó en su ayudante, Richard Courant (1888-1972). Una tarde, aprovechando que atravesaban una zona de arbustos espinosos, Courant le dijo que se había roto los pantalones. «¡Ah! No», replicó Hilbert, «llevan semanas así, pero nadie se ha dado cuenta». Aún más, este matemático, que solía montar en bicicleta por las calles de Gotinga, nunca se cansó de flirtear. En una fiesta de cumpleaños se improvisaron versos sobre sus galanteos con nombres de chica para cada una de las letras del abecedario. Pero cuando se llegó a la letra K nadie sabía qué decir. En ese momento Käthe, su sensata e inteligente mujer, señaló: «Por lo menos podíais pensar en mí una vez».

Naturalmente, también pesaron las circunstancias, esto es, el tiempo y el lugar: la pequeña pero poderosa Universidad de Gotinga. La muerte del anciano Kronecker y el retiro de Weierstrass descongelaron el mundo académico alemán, desembocando en un baile de cátedras académicas del cual salieron muy beneficiados Klein y Hilbert, quienes, como vimos, pudieron asentarse definitivamente en Gotinga. Una vez allí, ese gran político científico que fue Felix Klein orquestó que Gotinga se convirtiera en el centro matemático más importante del mundo, con un impresionante grupo de profesores, entre los que descollaban Hilbert y Minkowski (quien se incorporó a la institución en 1902), así como con numerosos discípulos de alto nivel y visitantes extranjeros.

Los treinta y cinco años como docente en Gotinga dieron para mucho. La nómina de discípulos de Hilbert es impresionante: Otto Blumenthal, Max Dehn, Erhard Schmidt (1876-1959), Richard Courant, Ernst Zermelo (1871-1953), el famoso campeón mundial de ajedrez Emanuel Lasker (1868-1941), etc. Entre todos ellos sobresale Hermann Weyl, quien se doctoró con Hilbert en 1908 y le sucedió cuando se retiró en 1930. Hilbert siempre actuó con ellos como maestro, ayudándoles en la medida de lo posible. Así, por ejemplo, cuando brotó la oposición a la propuesta de que una joven y eminente matemática, Emmy Noether (1882-1935), fuese nombrada profesora en Gotinga, Hilbert se enfrentó a sus colegas más reaccionarios, declarando con ironía: «No veo que el sexo de un candidato sea una razón en contra de su admisión. Después de todo, esto es una universidad y no un establecimiento de baños públicos». Otra muestra de la libertad de su pensamiento.

CAPÍTULO 3

Axiomatizar la física

Los primeros años del nuevo siglo encontraron a Hilbert trabajando en el campo del cálculo de variaciones y de las ecuaciones integrales. Sus aportaciones dieron forma a una nueva rama del análisis: el análisis funcional. Y, además, fueron claves en la formulación matemática de la relatividad general y de la mecánica cuántica. Hilbert compitió de igual a igual con Einstein en la búsqueda de unas ecuaciones que incluyeran la gravedad en el marco relativista. Pero hay más: el denominado espacio de Hilbert ha terminado siendo la estructura matemática que guarda la llave de entrada al universo cuántico.

Uno de los descubrimientos más recientes de los historiadores de las matemáticas ha sido el alto grado de interés que Hilbert manifestó por la física de su tiempo. La amistad de Minkowski y la lectura de Hertz supusieron dos importantes catalizadores de este interés en su juventud; y la tradición matemática de Gotinga hizo, indudablemente, el resto (Gauss, Riemann y Klein compartieron el gusto por la física). Aún más: el hecho de que su actividad científica coincidiera con el nacimiento de las grandes teorías de la física del siglo XX, la teoría cuántica (1900) y la relatividad (1905), intensificó esta afición durante las dos primeras décadas del nuevo siglo.

Desde su llegada a Gotinga en 1895, Hilbert impartió numerosos cursos y seminarios dedicados a la física matemática. No es de extrañar, por tanto, que en la conferencia de París de 1900, dentro del epígrafe dedicado al sexto problema, señalase que las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría sugerían tratar de la misma manera, por medio de axiomas, aquellas ciencias físicas en que las matemáticas jugaban un papel destacado. La mecánica, la óptica, pero también la termodinámica o la teoría de la electricidad, debían seguir el pulcro modelo preconizado por la geometría. El rigor no era una propiedad exclusiva de la matemática. La física podía hacerse completamente rigurosa según los estándares del método axiomático.

En 1905, avanzando en esta dirección, el matemático alemán ofreció una exposición axiomática de la mecánica, describiendo el concepto de fuerza a través de varios axiomas sobre vectores. A continuación, axiomatizó la teoría de probabilidades, tal y como esta aparecía dentro de la teoría cinética de los gases. Varios licenciados de Gotinga, relacionados con el insigne catedrático, realizaron aportaciones significativas. En 1909, Georg Hamel (1877-1954) axiomatizó la mecánica clásica y Constantin Carathéodory (1873-1950) hizo lo propio con la termodinámica. Y, según veremos, Hilbert dio otro paso de gigante cuando en 1915 formuló sus propias ecuaciones para la teoría de la relatividad general. Finalmente, a finales de los felices años veinte, intentó, en colaboración con Lothar W. Nordheim (1899-1985) y John von Neumann (1903-1957), anclar la mecánica cuántica en un sistema axiomático.

Pero su interés por la física no puede desconectarse de sus aportaciones al análisis. Sus saltos del análisis a la física, y de la física al análisis, durante las dos primeras décadas del siglo, son una constante a tener muy en cuenta. Hilbert centró su atención en dos ramas bastante próximas del análisis: el cálculo de variaciones y las ecuaciones integrales. De hecho, tres de los veintitrés problemas que Hilbert presentó en París trataban del cálculo de variaciones y, en particular, del desarrollo de la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. El hilo, precisamente, del que vamos a comenzar a tirar.

LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Las ecuaciones de toda la vida (las ecuaciones algebraicas) responden a la necesidad de calcular números desconocidos, como por ejemplo las raíces de un polinomio. Pero en las aplicaciones de las matemáticas surgen a menudo problemas cualitativamente distintos: problemas en los que la incógnita no es un número sino una función, que expresa la relación entre varias variables (por ejemplo, en el caso del movimiento de un planeta, la dependencia

de las coordenadas espaciales respecto del tiempo). Una clase especial de estas ecuaciones son las llamadas *ecuaciones diferenciales*, en las que se trata de determinar la función desconocida a partir de una o varias ecuaciones en que intervienen las derivadas de la función.

Tras fundar el cálculo (diferencial e integral), Newton formuló las leyes de la física de una forma que relacionaba entre sí las magnitudes físicas y sus ritmos de cambio. Es decir, por ejemplo, el espacio recorrido por un móvil con su velocidad, y la velocidad del móvil con su aceleración. Las leyes físicas quedaron, por tanto, expresadas por medio de ecuaciones diferenciales, siendo los diferenciales y las derivadas medidas de los ritmos de cambio. La derivada de una función representa cómo varía el valor de la función, si aumenta, disminuye o permanece constante. La aceleración, por seguir con el ejemplo, mide los cambios en la velocidad del móvil, la variación de la velocidad en el tiempo, porque es el cociente de los diferenciales de la velocidad y del tiempo; en otros términos, es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Sin embargo, la resolución de ecuaciones diferenciales, como de ecuaciones algebraicas, no siempre es fácil. Es más, casi nunca lo es. Cuando la función incógnita depende de una única variable, se llaman *ecuaciones diferenciales ordinarias*. Por ejemplo, la derivada de la función seno $y = \operatorname{sen} x$ es $y' = \cos x$, donde y' denota la derivada primera. Esta última función puede derivarse, a su vez, para dar $y'' = -\operatorname{sen} x$, de lo que podemos deducir la ecuación diferencial $y'' = -y$. Esta ecuación es una ecuación diferencial de segundo orden, ya que aparece una derivada segunda.

Otro ejemplo de ecuación diferencial de segundo orden es la segunda ley de Newton: $F = m \cdot a$ («fuerza igual a masa por aceleración»), donde

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

la aceleración es la derivada primera de la velocidad, pero también la derivada segunda de la posición, si $x(t)$ denota la posición del móvil en función del tiempo.

En cambio, si la función desconocida depende de más de una variable y aparecen derivadas con respecto a estas variables, se llaman *ecuaciones en derivadas parciales*. Para citar un ejemplo muy sencillo, el volumen V de un gas es una función de su temperatura T y de la presión P sobre él; o sea, $V(T,P)$. Cuando T o P varían, V varía. La derivada de $V(T,P)$ con respecto a T se llama *derivada parcial respecto a T*, y se escribe:

$$\frac{\partial V(T,P)}{\partial T}.$$

De igual modo,

$$\frac{\partial V(T,P)}{\partial P}$$

es la *derivada parcial respecto a P*. Como en el caso de las derivadas ordinarias, hay derivadas parciales segunda, tercera, etc.; así, como ilustración,

$$\frac{\partial^2 V(T,P)}{\partial P^2}$$

es la segunda derivada parcial respecto a P. Pero las ecuaciones diferenciales en que intervienen derivadas parciales presentan rasgos peculiares que las diferencian esencialmente de las ordinarias. En el estudio de los fenómenos naturales, las ecuaciones en derivadas parciales aparecen con tanta frecuencia como las ecuaciones diferenciales ordinarias, pero normalmente son mucho más difíciles de resolver.

A lo largo del siglo XVIII, estudiar un fenómeno físico y hallar la ecuación diferencial que lo gobierna se hicieron sinónimos. Así, tras el hallazgo por Newton de la célebre ecuación diferencial «fuerza igual a masa por aceleración», que rige el movimiento de los sistemas de puntos y de los sólidos rígidos, el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) formuló un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describía el movimiento de me-

dios continuos como el agua, el aire u otros fluidos sin viscosidad. Poco después, el matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) enfocó su atención en la música, en la ecuación en derivadas parciales que representa la propagación de las ondas del sonido. Y, más tarde, Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) se centró en el flujo de calor, proponiendo otra ecuación en derivadas parciales que describe su difusión. Entrado el siglo XIX, las ecuaciones de Navier-Stokes describieron el movimiento de los fluidos viscosos, y las ecuaciones de Maxwell, el electromagnetismo. Toda la naturaleza —sólidos, fluidos, sonido, calor, luz, electricidad— quedó modelada mediante ecuaciones en derivadas parciales. Ahora bien, una cosa era dar con las ecuaciones del fenómeno en cuestión y otra, bien distinta, resolverlas.

«La física se está haciendo demasiado complicada para dejársela a los físicos.»

— David Hilbert.

Las ecuaciones en derivadas parciales paradigmáticas son, de hecho, tres ecuaciones gestadas en el ámbito de la física matemática: la ecuación de ondas, la ecuación del calor y la ecuación de Laplace. Antes de ocuparnos de esta última, conviene introducir una notación que simplifica extraordinariamente su escritura: se llama *laplaciano* de una función $u = u(x, y, z, t)$ de las coordenadas espaciales y del tiempo a la suma de las segundas derivadas respecto de x, y, z:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Este grupo de parciales recibió el nombre de laplaciano de manos de James Clerk Maxwell (1831-1879), aunque su representación mediante la letra griega delta mayúscula se remonta a un tratado de 1833.

En estas condiciones, $\Delta u = 0$ es la *ecuación de Laplace* o *ecuación de continuidad*, que expresa que un fluido perfecto en el que no hay remolinos es indestructible. Esta ecuación codifica mate-

LA ECUACIÓN DE ONDAS Y LA ECUACIÓN DEL CALOR

La ecuación de ondas, que describe la propagación de las ondas del sonido o de la luz, pero también de las ondas físicas producidas sobre una cuerda o una membrana vibrantes, es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u.$$

Por su parte, la ecuación del calor, que rige cómo se difunde el calor, es decir, cómo circula desde las zonas donde la temperatura es más alta a las zonas donde es más baja, responde a la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u.$$

Ambas ecuaciones parecen engañosamente similares, salvo porque en la primera aparece la derivada segunda respecto al tiempo en vez de la derivada primera. Esta sutil diferencia matemática tiene drásticas implicaciones físicas: la ecuación de ondas es reversible, en el sentido de que permanece invariante si cambiamos el sentido del paso del tiempo. Matemáticamente: si cambiamos t por $-t$, la ecuación no cambia, ya que al derivar dos veces los signos negativos se cancelan. En consecuencia, la ecuación no regulariza las soluciones con el paso del tiempo, con lo que se puede recuperar información del pasado (por esta razón los seres humanos empleamos señales lumínicas o sonoras para comunicarnos). Por el contrario, la ecuación del calor no es reversible (al cambiar t por $-t$, no obtenemos la misma ecuación). La difusión del calor está orientada temporalmente, depende de la flecha del tiempo. Esta irreversibilidad se manifiesta en que la ecuación regulariza las soluciones con el paso del tiempo, con lo que en general no puede recuperarse información del pasado (la solución correspondiente a un pico de calor termina por suavizarse de tal modo que, pasado el tiempo, resulta imposible saber dónde y cómo se produjo la explosión o el encendido, dado que el calor se ha difundido por todo el espacio).

máticamente una perogrullada: si el fluido es incompresible, debe salir tanto fluido de cualquier pequeño volumen en un instante de tiempo como fluye dentro de él. No obstante, al matemático y físico francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827) se le apareció en mecánica celeste estudiando el potencial gravitatorio, esto es, la función que mide la fuerza gravitatoria con que un cuerpo, tenga la forma que tenga, atrae a una masa puntual exterior. A resultas

de esto, la ecuación de Laplace también recibe el nombre de *ecuación del potencial*. Pues bien, podemos ya anticipar que una de las aportaciones geniales de Hilbert al análisis tiene que ver con la resolución rigurosa de esta ecuación en derivadas parciales.

DEL PROBLEMA AL PRINCIPIO DE DIRICHLET

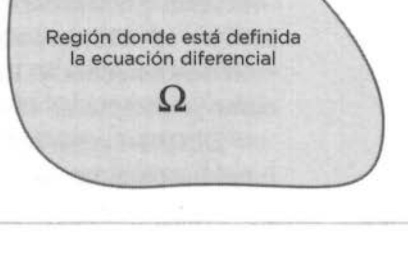
Uno de los problemas relacionados con la ecuación de Laplace que trajo de cabeza a los matemáticos y los físicos del siglo XIX fue el denominado *problema de Dirichlet*, llamado así en honor del matemático alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Consiste en encontrar una *función armónica* en un dominio del espacio, es decir, una función u que satisface la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en ese dominio del espacio, cumpliendo, en la frontera del dominio (figura 1), que toma unos valores prefijados (por ejemplo, $u = f$ en la frontera). Formalmente, si denotamos por Ω al dominio y por γ a la frontera del dominio:

En el problema de Dirichlet se busca una función *u* que tome unos valores determinados en la frontera y cuyo laplaciano se anule en el interior de la región.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \\ u = f \text{ en } \gamma \end{cases}.$$

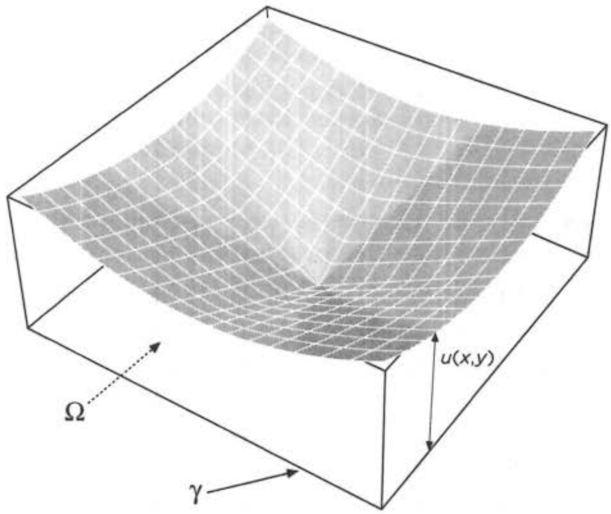
Este problema matemático estaba relacionado con multitud de problemas físicos. Uno de ellos proporcionaba una idea sobre cómo resolverlo. Imaginemos una membrana elástica uniformemente estirada sobre una región del plano Ω, delimitada por una curva γ. Supongamos, ahora, que se deforma el contorno de manera que cada punto de γ pasa a ocupar un punto de una cierta altura dada por la función f. Como es natural, al haber deformado su contorno, la membrana se combará y comenzará a oscilar. Si la dejamos que oscile libremente, transcurrido

FIG. 1



Posible posición de equilibrio de la membrana pasado el tiempo.

FIG. 2



cierto tiempo alcanzará el equilibrio, adoptando cierta posición (figura 2). Y nos gustaría calcular la magnitud de la deformación de cada punto del interior de la membrana respecto al plano, es decir, la altura que ahora ocupa, lo que se ha desplazado. La función $u(x,y)$, que mide estas cantidades, satisface el problema de Dirichlet (en dos dimensiones).

Físicamente, parece claro que tiene que existir una función u solución del problema y que, además, ha de ser única, puesto que antes o después la membrana terminará parándose, y lo hará de una única manera. Sin embargo, matemáticamente la cuestión no es tan evidente. En sus lecciones sobre la materia, Dirichlet —al igual que Gauss, G. Green (1793-1841) o W. Thompson (1824-1907)— ideó un método para resolver el problema y hallar la función desconocida u. Este método fue bautizado, posteriormente, como *principio de Dirichlet* por Riemann.

Dirichlet conjeturó que en la posición de equilibrio estable la función solución u debe tener la mínima energía, es decir, debe dar el menor valor para la siguiente integral (la *energía de Dirichlet*):

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy.$$

Con otras palabras, la función que buscamos ha de dar, en comparación con todas las posibles funciones que verifican la misma condición de contorno, el mínimo valor posible para la energía. Sobre bases físicas se torna muy plausible que, dada cualquier curva cerrada en el espacio, existe una superficie de mínima energía que la llena, porque cualquier superficie o membrana tenderá a adoptar una configuración que requiera la mínima energía.

Como el integrando de $J(u)$ es siempre positivo (es una suma de cuadrados), la integral $J(u)$ siempre es mayor o igual que cero. Por lo que a Dirichlet le pareció razonable que tenía que existir una función u que dé el valor más pequeño. Nótese que si no estuviese esa cota inferior que supone el cero, podría ser que los valores que obtuviéramos fuesen cada vez más pequeños (0, –1, –2, –3…) sin que hubiera necesariamente un valor mínimo. Suponiendo la existencia de esta función u minimizadora de $J(u)$, Dirichlet demostró que la función u es armónica y, por tanto, satisface el problema inicial que se quería resolver.

Ahora bien, lo que no estaba nada claro es si existía efectivamente ese mínimo, esa función u donde la integral de Dirichlet alcanzaba su menor valor. Piénsese, por ejemplo, en el conjunto de todos los números reales positivos: todos son mayores o iguales que cero, pero no hay ninguno que sea el más pequeño (para cualquier número que seleccionemos siempre habrá uno más pequeño). El ínfimo del conjunto (el cero) no se alcanza dentro del propio conjunto (los números positivos), por lo que no hay mínimo. Los esfuerzos de Weierstrass y su escuela de matemáticos por fundamentar rigurosamente la existencia de u se dieron de bruces con la cuestión. No obstante, los físicos seguían creyendo que el llamado *principio de Dirichlet* garantizaba, precisamente, la resolución del problema de Dirichlet. Solo Hilbert, alrededor de 1904, logró rehabilitar el principio y demostrar fuera de toda duda la existencia del mínimo. Pero, para explicar su prueba, tenemos que sumergirnos en el campo limítrofe del cálculo de variaciones, que busca determinar qué funciones hacen mínima una integral.

EL CÁLCULO DE VARIACIONES

El problema de la braquistócrona, o curva de descenso más rápido, fue históricamente el primer problema en el desarrollo del cálculo de variaciones. Entre todas las curvas que unen dos puntos, se desea hallar aquella a lo largo de la cual una partícula, moviéndose bajo la fuerza de la gravedad, cae en menos tiempo. Considerando todas las posibles curvas que unen el punto A con el punto B, se busca aquella que minimiza el tiempo de caída, que puede expresarse en forma de integral. Por consiguiente, se trata de buscar la curva o función que hace menor el valor de esa integral. Este problema fue propuesto en 1696 por Johann Bernoulli (1667-1748) a sus colegas europeos, y fue resuelto independientemente por Newton, Leibniz, Johann y Jakob Bernoulli: la solución no era la línea recta ni un arco de circunferencia, sino un arco de una curva denominada *cicloide* (figura 3).

Las nociones básicas de esta nueva rama del análisis llevan la firma de Euler y Lagrange. El primero fue, de hecho, quien la bautizó como *cálculo de variaciones*; y el segundo, el creador del «método de variaciones» que permite resolver muchos de los problemas encuadrados dentro de la disciplina. La base de los problemas variacionales es la siguiente: se supone un conjunto C de elementos cualesquiera (números, puntos geométricos, funciones, etc.), a los que denotamos por u, y a cada elemento u le asociamos un número $F(u)$. Si C es un conjunto numérico, $F(u)$ es una función de una variable; si C es un conjunto de puntos del plano, $F(u)$ es una función de dos variables; etc. Pero si C es un conjunto de funciones, $F(u)$ es lo que se llama un *funcional*, que en alguna de las diversas funciones que componen el conjunto puede tomar un valor extremo (máximo o mínimo).

Para resolver un problema de cálculo de variaciones se comparaba una función u de prueba con todas las funciones próximas, esto es, con aquellas que se obtienen *variando* ligeramente la función u de prueba (de aquí precisamente el nombre de «cálculo de variaciones»), y se calculaba el funcional F a lo largo de cada función. La función solución tiene la propiedad de que el funcional a lo largo de todas las funciones próximas es siempre mayor (si

estamos buscando un mínimo). Este es, en esencia, el núcleo del «método de variaciones». Es más, Euler y Lagrange encontraron que para que una función u de C proporcione un valor extremo (máximo o mínimo) al funcional, $F(u)$ tiene que satisfacer una cierta ecuación diferencial (las ecuaciones de Euler-Lagrange). Pero la satisfacción de esta ecuación era una condición necesaria aunque no suficiente.

Una medida del éxito de esta constelación de ideas es que múltiples matemáticos de los siglos XVIII y XIX se esforzaron por interpretar las ecuaciones diferenciales que aparecían en la física como condiciones extremas de determinados funcionales. Las leyes físicas podían reescribirse en términos de principios de mínimo, ya que la naturaleza se conducía siempre de la manera más económica. Una meta que ya había acariciado Pierre de Fermat (1601-1665) para la óptica: la trayectoria que sigue un rayo de luz cuando pasa de un punto A a otro punto B de un medio distinto es aquella que requiere el menor tiempo, así como Pierre Louis de Maupertuis (1698-1759) para la mecánica, con su principio de mínima acción (figura 4). Los libros de física de finales del siglo XIX estaban llenos de principios similares, que afirmaban que determinados procesos físicos sucedían siempre de manera que se minimizaba cierta cantidad. Eran los denominados *principios variacionales*.

En suma, esta venerable rama del análisis era una suerte de extensión del cálculo infinitesimal. Mientras que el cálculo tradicional enseñaba cómo hallar los máximos o los mínimos de una función, el cálculo de variaciones enseñaba cómo determinar la función que maximiza o minimiza un determinado funcional, que nor-

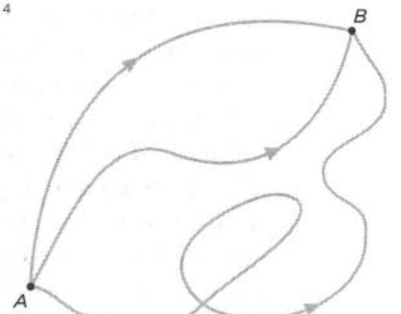
FIGURA 3: **Un arco de cicloide entre *A* y *B*.**

FIGURA 4: **De las tres trayectorias posibles, ¿cuál elegiría una partícula para pasar de *A* a *B*? El principio de mínima acción establece que aquella que minimice una cantidad denominada *acción*.**

FIG. 3



FIG. 4



malmente venía expresado en forma de una integral. No obstante, este problema era mucho más difícil y a finales del siglo XIX aún no había podido especificarse una serie de criterios que garantizaran la existencia del extremo (del máximo o del mínimo). No es de extrañar, por tanto, que el cálculo de variaciones copara tres de los veintitrés problemas de Hilbert.

Mientras que en el problema 23 Hilbert planteaba una posible generalización de los métodos variacionales, en los problemas 19 y 20 se preocupaba, respectivamente, por las propiedades y la existencia de las soluciones de los problemas del cálculo de variaciones. En efecto, había dos cuestiones abiertas. Una era la existencia o no de solución (problema 20). Y otra, las propiedades que esta solución, caso de existir, satisfacía. Desnudado de su ropaje técnico, lo que Hilbert estaba preguntando en el problema 19 era si el tipo de problemas físicos que solían plantearse como problemas de cálculo de variaciones —el problema de Dirichlet, por ejemplo— debían tener siempre soluciones con el mejor comportamiento: ¿las soluciones eran siempre tan suaves y regulares como las funciones analíticas (que son derivables infinitas veces)? Este problema fue resuelto en 1904 por el matemático ruso Sergei Bernstein (1880-1968), como parte de su tesis doctoral (codirigida por Hilbert). Bernstein demostró que las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales que interesaban a Hilbert —incluyendo aquí las de la ecuación del potencial de Laplace— eran, caso de existir, regulares, con un comportamiento inmejorable si satisfacían ciertas condiciones bastante simples sobre sus tres primeras derivadas. Ahora era evidente que, por ejemplo, la integral de Dirichlet, si alcanzaba su mínimo, lo hacía necesariamente en una función admisible.

Pero fue en ese mismo año de 1904 cuando Hilbert dejó asombrado al mundo matemático al rescatar el principio de Dirichlet del descrédito en que había caído después de las críticas de Weierstrass. Antes de Weierstrass se había supuesto que en el cálculo de variaciones todo funcional tenía un mínimo. Hilbert demostró que en el caso concreto de la energía de Dirichlet $J(u)$ había, efectivamente, un mínimo. Construyó una sucesión *minimizante* de funciones, cuyos valores para la integral eran cada vez

más pequeños y convergían al valor ínfimo. Y a partir de ella obtuvo el mínimo, es decir, la función u que alcanzaba de facto ese valor ínfimo. Físicos y matemáticos podían respirar tranquilos.

LA CIENCIA EN LA ENCRUCIJADA

A finales del siglo XIX, la física funcionaba correctamente dentro del dominio de la experiencia común. La mecánica clásica (creada por Newton) y la electrodinámica clásica (finalizada por Maxwell) proporcionaban un marco totalmente satisfactorio para la comprensión del mundo que nos rodea. Con el aumento de precisión en los instrumentos de medida y la posibilidad de realizar experimentos más y más complejos, los físicos empezaron a estudiar fenómenos en condiciones poco usuales: a velocidades muy altas (próximas a la de la luz) y a escala macrocósmica o microscópica. Fue entonces cuando comenzaron a surgir discrepancias con las predicciones suministradas por la física clásica, lo que motivó una profunda revisión de sus fundamentos y dio origen a las dos grandes teorías físicas del siglo pasado: la *teoría de la relatividad* y la *teoría cuántica*. La primera trataba de explicar los fenómenos que ocurren a altas velocidades (relatividad especial) y a escalas cósmicas (relatividad general), mientras que la segunda se enfrentaba con los que tienen lugar a escala atómica (mecánica cuántica).

Hacia 1900, la claridad de la física clásica solo estaba oscurecida por cuatro nubarrones, por cuatro problemas que inexplicablemente se resistían: la radiación del cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico, los espectros de los elementos químicos y el viento de éter. Mientras que los tres primeros abrieron las puertas a la física cuántica, el último lo hizo con la física relativista. El principio clásico de relatividad, debido a Galileo, no era capaz de explicar ciertos fenómenos electromagnéticos medidos sobre un interferómetro (el experimento de Michelson-Morley). En 1905, Albert Einstein (1879-1955) sentó las bases de la teoría especial de la relatividad con su artículo «Sobre la electrodinámica de cuerpos

en movimiento». Para resolver la aparente contradicción que surgía al estudiar el comportamiento de las ecuaciones de Maxwell bajo las transformaciones de Galileo (sin recurrir a un hipotético viento de éter), Einstein propuso mantener la teoría de Maxwell modificando la mecánica de Newton. Había que abandonar las transformaciones de Galileo, sustituyéndolas por las transformaciones de Lorentz, y adoptar —como es bien sabido— una hipótesis revolucionaria: la invariancia de la velocidad de la luz. Entre sus consecuencias se contaban las siguientes: el rechazo del éter, la relatividad de la simultaneidad, la contracción del espacio, la dilatación del tiempo, etc. La teoría de la relatividad especial eliminó de un plumazo la ilusión del espacio y el tiempo absolutos de la física clásica.

La relatividad especial, aunque tremendamente atrevida en sus postulados físicos, no requería matemáticas desconocidas hasta entonces por los físicos —estaba, de hecho, en germen en la obra de Poincaré y de H. Lorentz (1853-1928)—. En su alumbramiento Einstein empleó matemáticas poco exigentes. No obstante, algunos físicos y matemáticos opinaban que una colección de ideas físicas y filosóficas tan radicales debía aderezarse con un nuevo planteamiento matemático. Y aquí entró en juego un viejo conocido de Hilbert: su amigo Hermann Minkowski.

Ambos amigos habían vuelto a reunirse en 1902. El prusiano rechazó el ofrecimiento de una cátedra en Berlín y, a cambio de su permanencia en Gotinga, negoció la dotación de otra cátedra para el judío de origen ruso. Gotinga se convirtió de la noche a la mañana en la meca de las matemáticas teutonas. Allí vivían tres profetas: Klein, Hilbert y Minkowski. Muestra de lo mucho que los dos últimos congeniaron fue que entre 1902 y 1909 impartieron al alimón varios cursos de física matemática, en particular sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento (lo que hoy se conoce por el nombre de *relatividad*). Minkowski, que había permanecido muy atento a las teorías pre-relativistas de Poincaré y Lorentz, se hizo eco enseguida del enfoque preconizado por Einstein. Constituyó toda una sorpresa que este enfoque revolucionario proviniera de un antiguo alumno suyo en Zúrich, sobre cuyos conocimientos matemáticos albergaba alguna duda.

LA CONJETURA DE WARING



Edward Waring.

Tanto para Minkowski como para Hilbert la teoría de números era la creación más maravillosa de la mente humana. En 1908, aprovechando una tregua en su crisis de salud, Hilbert demostró la conjetura propuesta por el matemático británico Edward Waring (1734-1798): «Todo número natural es igual a la suma de como mucho 9 cubos, de no más de 19 potencias cuartas, y así sucesivamente». En otras palabras, se afirmaba, sin prueba alguna, que para cualquier potencia k hay un cierto número mínimo de tales potencias —llamémoslo $g(k)$, dado que depende de la potencia k seleccionada— que permite expresar cualquier número n como suma de exactamente $g(k)$ potencias k-ésimas:

$$n = x_1^k + x_2^k + ... + x_{g(k)}^k.$$

A título de ejemplo, Joseph-Louis Lagrange había probado en 1770 que todo número es la suma de cuatro cuadrados, es decir, que $g(2)=4$. Pero hasta Hilbert muy pocos avances se habían conseguido. Para algunos valores concretos de k (k=3, 4, 5, 6, 7 y 8), se había logrado acotar el valor de $g(k)$; por ejemplo, se había probado que $g(4)\leq 53$, pero aún quedaba lejos demostrar que bastaban solo 19 potencias cuartas para escribir cualquier número, esto es, que $g(4)=19$.

Un premio bien merecido

Hilbert, fiel a su estilo, no estimó directamente los valores de $g(k)$ (cuyo cálculo exacto se obtendría a lo largo del siglo XX), sino que demostró indirectamente que la función $g(k)$ está bien definida, es decir, que para cada k toma un valor finito (nunca toma valores infinitos, de lo que se deduce que siempre existe un mínimo número de potencias necesarias para escribir cualquier número). Este hito le reportó el premio János Bolyai en su edición de 1910. En calidad de miembro del jurado internacional, Poincaré ensalzó la obra del matemático alemán, no solo por lo que se refería a la teoría de números, sino también por el amplio espectro de temas tratados: los invariantes, los fundamentos axiomáticos de la geometría, el principio de Dirichlet, etc. Asimismo, resaltaba el rigor y la simplicidad de los métodos empleados, ponderando el influjo de Hilbert como profesor.

Para Minkowski, había que considerar el tiempo como una cuarta dimensión. Había una ligazón ineludible entre el espacio y el tiempo en virtud de la cual existía una única entidad: el espacio-tiempo. Todo lo que en Einstein era confuso aparecía claro en el mundo seudoeuclídeo de cuatro dimensiones que imaginaba Minkowski. Este marco geométrico hizo mucho por la difusión de la teoría de la relatividad especial. Su impacto fue tremendo, aunque tardó en asimilarse (parecía desconcertante que para hacer física hubiera que recurrir a una geometría en que los vectores pueden tener longitud negativa). A Einstein le pareció una erudición superflua, en una actitud que encontró la oposición de Hilbert, quien llegó a afirmar: «cualquier muchacho en las calles de Gotinga comprende mejor que Einstein la geometría cuadridimensional». Minkowski presentó su formalismo en varias conferencias pronunciadas a lo largo de 1908, pero no vivió lo suficiente para verlas publicadas y disfrutar del éxito que cosecharon: en 1909 murió como consecuencia de las complicaciones surgidas en una operación de apendicitis. Esta pérdida irreparable agravó la profunda depresión que Hilbert sufría desde el año anterior como consecuencia de un agotamiento nervioso.

EINSTEIN, HILBERT Y LAS ECUACIONES DE LA RELATIVIDAD GENERAL

A partir de 1911, Einstein dirigió sus esfuerzos a integrar la gravitación en su teoría especial de la relatividad. Buscaba una teoría general. Pese a su reticencia inicial, Einstein acabó admitiendo la utilidad del formalismo de Minkowski, puesto que le puso sobre la pista de que la clave estaba en la geometría. Se trataba de representar los efectos de la gravitación por medio de la estructura geométrica del espacio-tiempo, que obligaría a los objetos a desplazarse en la forma prevista. Había que geometrizar la gravedad.

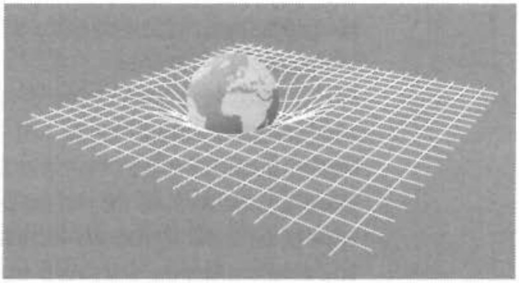
En los primeros intentos el formalismo matemático empleado por Einstein fue bastante elemental y los resultados no fueron nada prometedores. Si la geometría del espacio-tiempo

debía depender de su contenido energético-material, es decir, si la gravedad tenía que curvar el espacio-tiempo, se precisaba una geometría variable, no prefijada de antemano y muy distinta de la usual. Un matemático conocido suyo llamó su atención sobre los trabajos clásicos de Gauss, Riemann y, en especial, los publicados por Gregorio Ricci (1853-1925) y Tullio Levi-Civita (1873-1941) en 1901. A la postre, estos últimos contuvieron la mayor parte de los elementos de la geometría riemanniana necesarios para la relatividad general. Con la ayuda de su amigo Marcel Grossmann (1878-1936), Einstein comenzó a estudiar dichos trabajos y descubrió que constituían el aparato matemático que precisaba y desconocía. Juntos, físico y matemático publicaron a finales de 1913 un folleto de veintiocho páginas titulado *Esbozo de una teoría general de la relatividad y de una teoría de la gravitación*. Su meta era modelizar el universo como una variedad geométrica tetradimensional, dotada de una métrica o distancia riemanniana dada por el tensor:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx_i dx_j.$$

Este tensor métrico, que determinaba las propiedades geométricas (claramente, no euclídeas), caracterizaba también el campo gravitatorio (véase la figura). No obstante, las ecuaciones del campo gravitacional contenidas en el artículo no eran correctas y no tardaron en abandonarlas. Comenzó entonces un largo y fatigoso período para Einstein, que solo vislumbraría la luz a finales de noviembre de 1915. Einstein pugnaba con el cálculo tensorial para dar con las ecuaciones correctas. Se estaba adentrando en un océano que solo los matemáticos, en realidad algunos matemáticos, se atrevían a surcar. Uno de ellos era nuestro protagonista: David Hilbert.

De la misma forma que una sábana sujetada por dos personas se deforma cuando se deja caer en ella un objeto, un cuerpo de masa tan grande como la Tierra curva el espacio-tiempo a su alrededor, y esta curvatura es la causa de los movimientos de atracción gravitatoria que experimentamos en su superficie.



Desde 1909, y hasta prácticamente 1920, Hilbert mostró una gran inclinación por la física teórica, aplicando los métodos

del cálculo de variaciones a ella. Fruto de todos estos años sería el libro publicado en 1924 en colaboración con Richard Courant: *Métodos de la física matemática*, un manual de éxito durante decenios. Hilbert dedicó su atención a problemas físicos candentes, como los del átomo y la relatividad. Gracias al legado de Paul Wolkskehl, un rico industrial alemán aficionado a las matemáticas, pudo organizar periódicamente en Gotinga una serie de conferencias y estancias de académicos extranjeros de prestigio (Hilbert ironizaba a menudo con que la única razón por la que se reprimía de probar el último teorema de Fermat era para no hacerse con los 100 000 marcos que el legado establecía como premio y acabar de golpe con la gallina de los huevos de oro). Entre los primeros invitados con cargo a estos fondos estuvieron Poincaré y Lorentz, cuyas charlas trataron sobre cuestiones relacionadas con la mecánica relativista. Pero, posiblemente, la visita más famosa fue la de Einstein a comienzos del verano de 1915. Era la primera vez que el físico y el matemático coincidían. Einstein impartió una serie de seis conferencias en Gotinga y se hospedó con la familia Hilbert. Tras varios días en su compañía, Hilbert estaba ansioso por poner su capacidad matemática al servicio de las nuevas ideas sobre la gravitación. Durante los meses siguientes ambos entraron en una fase de trabajo febril, con frecuentes intercambios epistolares. Perseguían un mismo objetivo: dar con las ecuaciones de la relatividad general.

En algún momento, a Einstein comenzó a preocuparle que Hilbert estuviese tan implicado. Así, a finales de noviembre de 1915, Hilbert escribió a Einstein ofreciéndole sus ecuaciones y este, que acababa de descubrir las ecuaciones finales de la relatividad general, le respondió inmediatamente, intentando establecer su prioridad. Hilbert no pudo hacer otra cosa que mandar una nota de felicitación.

Tradicionalmente se ha afirmado que Hilbert descubrió las ecuaciones relativistas del campo gravitatorio antes que Einstein, aunque nunca reclamó la prioridad. Hilbert envió su artículo a publicar el 20 de noviembre de 1915, cinco días antes de que lo hiciera Einstein. Sirviéndose de sus amplios conocimientos matemáticos, formuló un principio variacional del que se de-

LAS ECUACIONES DE CAMPO DE LA RELATIVIDAD GENERAL

El espacio-tiempo de Minkowski es un espacio de cuatro dimensiones. La materia retuerce el espacio-tiempo de Minkowski, de modo que los objetos dejan de moverse en líneas rectas para hacerlo en curvas, en geodésicas, bajo la acción de la gravedad o, equivalentemente, de cierta aceleración. Cuanto más masa o energía inyectemos, más se curvará el espacio-tiempo de Minkowski. La relación entre la presencia de masa-energía y la forma del espacio-tiempo cuadridimensional viene dada por las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

En el primer miembro de la ecuación aparece $G_{\mu\nu}$, que es el tensor de curvatura de Einstein: mide la deformación del espacio y depende, a su vez, del tensor métrico, de los g_{ij} de la distancia. En el segundo miembro aparece, aparte del número π, la constante de gravitación universal G y la velocidad de la luz c, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, que encarna la materia. Resumiendo: el espacio le dice a la materia cómo debe moverse, y la materia le dice al espacio cómo debe curvarse. Anotemos, como curiosidad, que Hilbert fue el encargado de demostrar en 1917 que la geometría euclídea era la verdadera geometría del universo si y solo si el tensor de energía-momento era idénticamente nulo, esto es, en ausencia de materia. De todos modos, que la geometría euclídea haya sido destronada globalmente no quiere decir, ni mucho menos, que no sea útil localmente, en nuestro entorno.

ducían las ecuaciones de la gravitación y del electromagnetismo (Einstein, en cambio, se limitó a la interacción gravitacional). Postulaba, por un lado, que las leyes de la física están determinadas de manera que cierta integral alcanza su mínimo. Por otro, que cierta función que depende de la métrica riemanniana se mantiene invariante bajo transformaciones arbitrarias de coordenadas. Quería hacer con la gravitación y el electromagnetismo lo mismo que había hecho para la geometría: establecer con claridad sus fundamentos y deducir los principales resultados a partir de un número mínimo de axiomas o principios básicos. Estructura axiomática, método deductivo y cálculo de variaciones son los tres ingredientes fundamentales de todas las aportaciones de Hilbert a la física.

Ahora bien, si el artículo de Hilbert contenía las ecuaciones de la relatividad general en su versión más general (geometrizando no solo la gravedad, sino también el electromagnetismo), y si el artículo fue entregado por Hilbert cinco días antes que el de Einstein, ¿no debería recaer el mérito del descubrimiento de la teoría de la relatividad general en Hilbert, por mucho que se reconozca que Einstein allanó el camino? La respuesta a esta pregunta es negativa, por dos razones. La primera es porque la teoría hilbertiana no era idéntica a la einsteiniana. Formalmente eran equivalentes, pero diferían en la interpretación física. Para Einstein, el método axiomático era de poca utilidad en la materia; y, además, a diferencia de la mayoría de sus colegas, tampoco era partidario de que toda teoría física hubiera de expresarse mediante un principio variacional. Aunque a día de hoy asociamos el nombre de Einstein con el de un físico teórico ensimismado en cuestiones muy abstractas, conviene no perder de vista que tanto durante su educación como durante su período de mayor creatividad siempre se mantuvo muy apegado a la realidad física y experimental. Era más inductivo que deductivo.

«Ha habido algo de malos sentimientos entre nosotros, la causa de los cuales no quiero analizar. [...] Objetivamente es una lástima que dos colegas que se las han arreglado para sacar algo de este mezquino mundo no se lleven bien el uno con el otro.»

— Albert Einstein, en una carta dirigida a Hilbert (20 de diciembre de 1915).

La segunda razón, tanto más importante, es que muy recientemente se ha conocido —gracias al historiador de la matemática Leo Corry— que el contenido presentado por el catedrático de Gotinga en la Academia de Ciencias el 20 de noviembre no coincide con el finalmente publicado. Hilbert introdujo enmiendas y correcciones en su artículo el día 6 de diciembre teniendo en cuenta el presentado por Einstein el 25 de noviembre. Parece que Hilbert alteró sus ecuaciones para acomodarlas a las de Einstein. A pesar de la breve disputa entre ambos, el episodio no llevó a una animosidad a largo plazo.

LA CIENCIA Y LA GRAN GUERRA


Jean Gaston Darboux.

En 1914, gran parte de los europeos celebró el desencadenamiento de la Primera Guerra Mundial con una euforia desenfrenada. Hilbert, por el contrario, dejó claro desde el primer momento que la guerra le parecía absurda. En agosto de ese año, noventa y tres famosos intelectuales alemanes dirigieron un manifiesto al «mundo civilizado» en respuesta a la indignación creciente por las acciones del ejército alemán. Inmerso en esa atmósfera claramente nacionalista, Felix Klein firmó la declaración que secundaba la política del káiser. A Hilbert le pidieron que firmara, pero se negó insistiendo en que simplemente no sabía si las acusaciones vertidas contra Alemania eran falsas o no. Una conducta que lo equiparó a Einstein, que, fiel a su pacifismo militante, tampoco se avino a firmar el manifiesto. Aún más, en mitad de la contienda, en 1917, Hilbert publicó un obituario laudatorio de Jean Gaston Darboux (1842-1917), un distinguido matemático francés recientemente fallecido. Cuando los estudiantes rodearon su casa pidiendo que rectificara esta conmemoración de un matemático enemigo, Hilbert respondió exigiendo una disculpa formal (y la obtuvo). Por todo esto, el resto de colegas europeos lo vio como un espíritu libre, desdeñoso de tradiciones y convenciones. De modo que al acabar la guerra, con la derrota sin paliativos de Alemania, mantuvo intacta su reputación. Y en el primer congreso internacional de matemáticos celebrado durante el período de entreguerras (Bolonia, 1928, el VIII Congreso Internacional de Matemáticos), no dudó en insistir en el carácter universal de las matemáticas, poniendo de relieve que todas las fronteras eran contrarias a la naturaleza.

LAS ECUACIONES INTEGRALES

Si la etapa investigadora de Hilbert en el cálculo de variaciones le puso en condiciones de participar en la elaboración de la teoría de la relatividad general, la etapa que dedicó entre 1904 y 1910 a

las ecuaciones integrales le permitió lo propio con la mecánica cuántica. Se trata, desde luego, de su contribución más importante al análisis matemático e, indirectamente, a la física: una serie de artículos que posteriormente recopiló en una monografía, *Fundamentos de una teoría general de las ecuaciones integrales lineales* (1912), que contenía no solo una teoría matemática rigurosa, sino también una gran variedad de aplicaciones físicas que van desde la teoría cinética de los gases a la teoría de la radiación.

Pero comencemos por el principio. Una ecuación integral se caracteriza porque la función desconocida aparece también dentro de una integral. Por ejemplo:

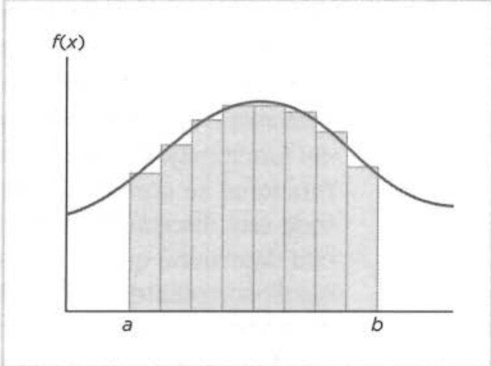
$$x(t)+\int_a^b K(t,s)x(s)ds=f(t),$$

donde la función $K(t,s)$ recibe el nombre de *núcleo* o *kernel* (de la raíz alemana *kern*, «núcleo, hueso») de la ecuación integral. Dado el núcleo $K(t,s)$ y la función $f(t)$ (que se suponen funciones continuas), se trata de hallar la función desconocida $x(t)$.

A lo largo del siglo XIX se habían planteado algunas ecuaciones integrales en relación con cuestiones físicas, como el problema de la braquistócrona o el problema de Dirichlet. Pero fue en 1888 cuando Paul du Bois-Reymond (1831-1889) acuñó el nombre de ecuaciones integrales para designarlas y propuso que se desarrollara una teoría general de estas ecuaciones como método alternativo para resolver problemas de ecuaciones diferenciales.

En 1900, el matemático sueco Ivar Fredholm (1866-1927) recogió una observación aparentemente inocua del matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) y la empleó con gran maestría para ofrecer una nueva forma de resolver el problema de Dirichlet utilizando ecuaciones integrales. En su estudio de la ecuación del potencial o ecuación de Laplace con condiciones de contorno, Fredholm transformó el problema en una ecuación integral como la de arriba, y explotó al máximo la semejanza entre esta ecuación integral y un sistema de infinitas ecuaciones lineales cuando se sustituye la integral por sus sumas de Riemann. Como es sabido,

una integral no es más que un procedimiento para calcular el área encerrada por una curva. Pues bien, básicamente, una suma de Riemann no es más que una forma equivalente de calcular el valor de la integral: se traza un número finito de rectángulos dentro del área encerrada por la curva y se aproxima esta área por la suma de las áreas de cada uno de los rectángulos (véase la figura). Cuando el número de rectángulos se hace tender a infinito, las sumas de Riemann convergen al valor exacto de la integral. Mediante esta técnica, la ecuación integral se desdoblaba en un sistema de infinitas ecuaciones lineales. Resolver la ecuación integral de partida era, por tanto, equivalente a resolver este sistema de infinitas ecuaciones lineales.



Una suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos de la figura, lo que sirve para aproximar el área encerrada por la curva, es decir, la integral de la función $f(x)$ entre a y b.

La noticia de los sensacionales resultados de Fredholm se extendió como la pólvora. En el invierno de 1900-1901, un profesor visitante expuso la analogía entre las ecuaciones integrales y los sistemas de ecuaciones lineales dentro del seminario de Hilbert en Gotinga, lo que hizo que se interesara vivamente por el tema y disparó su productividad en esta nueva dirección (llevado por el entusiasmo, auguró que la nueva herramienta permitiría incluso probar finalmente la hipótesis de Riemann). Sus seis trabajos al respecto, publicados entre 1904 y 1910, contenían los rudimentos de una nueva rama del análisis (el análisis funcional) y condujeron al concepto de espacio de Hilbert, base de toda la mecánica cuántica.

¡Y SE HIZO EL ANÁLISIS FUNCIONAL!

El análisis funcional estudia las funciones colectivamente, es decir, los espacios de funciones. Probablemente, los antecedentes más claros se encuentran en las ecuaciones integrales, que sugi-

rieron algebrizar el análisis (un enfoque típico del análisis funcional), pero también en el cálculo de variaciones, donde aparecen por vez primera las ideas de conjunto de funciones admisibles para resolver un problema y de distancia entre funciones (a través del funcional). El aparato matemático que cristalizó con el análisis funcional se convirtió a finales de los años veinte en el pilar de toda una disciplina física: la mecánica cuántica. Este hecho crucial determinó que se beneficiara continuamente de renovados y vigorosos planteamientos ligados a la extensión del formalismo cuántico.

El análisis funcional generaliza las nociones geométricas del espacio n-dimensional (distancia, teorema de Pitágoras, etc.) a los espacios funcionales de dimensión infinita. Entre estos espacios infinito-dimensionales destaca con nombre propio el llamado *espacio de Hilbert*, construido en el ámbito de las ecuaciones integrales por el propio Hilbert, pero axiomatizado en conexión con la mecánica cuántica por su aventajado discípulo John von Neumann, que le dio este nombre en honor a su maestro hacia 1930.

El espacio de Hilbert aparece en germen en un artículo de 1906 (el cuarto de la serie de seis sobre ecuaciones integrales y el primer artículo genuino sobre análisis funcional). Podría decirse, simplificando, que las funciones solución de las ecuaciones integrales formaban el espacio de Hilbert. En efecto, mientras estudiaba una ecuación integral, Hilbert tuvo la idea de considerar un sistema especial de funciones que cumpliera ciertas propiedades (por ejemplo, el sistema trigonométrico, para que fuera una base del espacio funcional) y reducir la resolución de la ecuación a la determinación de los coeficientes de la función incógnita respecto a ese sistema (para entendernos, las coordenadas de la función incógnita con respecto a esa base del espacio). Tomando el sistema trigonométrico, se trataba de hallar la función desconocida por medio de su representación mediante los coeficientes de Fourier (una sucesión infinita de números que permiten expresar una función de cuadrado integrable en forma de una suma de funciones trigonométricas multiplicadas por esos números). Los coeficientes, según observó, satisfacían la condición de que la suma de sus

cuadrados era finita. Sustituyendo estas identificaciones (o desarrollos) en la ecuación integral, el problema se transformó en el de resolver un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas (los coeficientes de la función, que eran de cuadrado sumable). Siguiendo con el ejemplo: si en la ecuación

$$x(t)+\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = f(t)$$

se representan las funciones $x(t)$, $f(t)$ y $K(t,s)$ por sus coeficientes de Fourier, entonces esta ecuación se escribe en términos del sistema infinito de ecuaciones:

$$x_p+\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}x_q = f_p \qquad\qquad p = 1, 2, 3\ldots$$

bajo la condición de que la suma de los diferentes coeficientes al cuadrado es finita, esto es, por ejemplo, que

$$\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 < \infty.$$

De esta manera, al pasar del reino de lo continuo al reino de lo discreto, la integral se transforma en una suma (la operación análoga).

El espacio de todas las sucesiones de números reales de cuadrado sumable (hoy designado ℓ_2), donde había que buscar la solución, era el espacio de Hilbert. En este espacio de sucesiones numéricas Hilbert definió, en analogía con el espacio euclídeo usual, una distancia, y extendió las nociones clásicas de límite, continuidad, etc. Tanto Hilbert como sus mejores discípulos (en especial, Erhard Schmidt, dentro de su tesis doctoral) explotaron al máximo esta semejanza geométrica del espacio funcional ℓ_2 con el espacio geométrico usual $\mathbb{R}^n$. Toda la teoría de espacios de Hilbert hizo la entrada en escena en su versión canónica sobre ℓ_2, el primer espacio con un número infinito de dimensiones conocido.

Estos años fueron decisivos para que cuajase la posibilidad de un análisis general de los espacios de funciones. En 1906 apareció la tesis doctoral de Maurice Fréchet (1878-1973), que tuvo

una influencia tremenda, ya que introdujo de modo abstracto la noción de distancia en un conjunto de funciones, así como el resto de nociones geométricas asociadas.

Poco después, en 1907, dos jóvenes matemáticos, Ernst Fischer (1875-1954), antiguo alumno de Minkowski, y Frigyes Riesz (1880-1956), a la sazón profesor de enseñanza media en una pequeña ciudad húngara, descubrieron independientemente una conexión inesperada entre el floreciente análisis funcional y otro de los grandes descubrimientos matemáticos de la época: la teoría de la integración de Henri Lebesgue (1875-1941), que venía a suturar las fisuras mostradas por las teorías de la integración clásicas de Cauchy y Riemann. El teorema de Fischer-Riesz establece que existe una correspondencia, un isomorfismo, entre el espacio de Hilbert ℓ_2 y el espacio de las funciones de cuadrado integrable (que hoy llamamos L_2). De la noche a la mañana había nacido un segundo modelo del espacio de Hilbert. Estos trabajos abrieron la puerta a la introducción de nuevos espacios funcionales como generalización de los ya conocidos: los espacios ℓ_p y L_p con $p > 1$ (por ejemplo, si $p = 3$, de sucesiones/funciones de cubo sumable/integrable, etc.).

El bautismo oficial del análisis funcional como tal se produjo en 1922, con la publicación del libro *Lecciones de análisis funcional*, de Paul Lévy (1886-1971). Ese mismo año apareció publicada la tesis doctoral del polaco Stefan Banach (1892-1945), que buscaba demostrar una retahíla de teoremas válidos para diversos espacios funcionales sin fijarse en la naturaleza concreta de estos espacios (en las funciones particulares que los componían).

Curiosamente, muchas de las contribuciones de Banach al análisis funcional se fraguaron en la ruidosa atmósfera de un café, el Café Escocés de Leópolis (bajo jurisdicción polaca en la época), donde al tiempo que demostraba su fama de buen bebedor, garabateaba notas sobre el mármol de la mesa o en una servilleta. Fruto de estas notas escritas por Banach y otros insignes matemáticos que lo acompañaban fue lo que después se ha dado en llamar el *Cuaderno escocés*, uno de los documentos matemáticos más importantes del siglo XX.







FOTO SUPERIOR:
Foto campestre de grupo. De izquierda a derecha: Alfréd Haar; el hijo de Hilbert, Franz; su inseparable amigo Hermann Minkowski; mujer desconocida; Käthe Hilbert; David Hilbert, y Ernst Hellinger.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
Einstein durante una visita a Lorentz en Leiden en 1921. Para establecer la teoría de la relatividad, el físico alemán aprovechó el trabajo de Lorentz y Poincaré, además de la colaboración matemática de Hilbert.

FOTO INFERIOR DERECHA:
John von Neumann, discípulo de Hilbert que dio nombre al espacio de Hilbert en honor de su maestro.

CUANTOS, MATRICES Y ONDAS

Tras mil y un intentos fallidos de explicar la radiación del cuerpo negro (esto es, dentro de una cavidad cerrada), el físico alemán Max Planck (1858-1947) lo consiguió al postular que la emisión y la absorción de energía se realizan siempre en paquetes, de forma discontinua o «cuantizada». La energía, como el dinero, no toma valores dentro de un rango continuo, sino solo en unidades discretas. La «discretización» dictada por Plank fue un acto desesperado en toda regla. El origen heroico de la teoría de los quanta se remonta, por tanto, al 14 de diciembre de 1900, cuando presentó públicamente su ley de radiación del cuerpo negro.

Pero el *dramatis personae* de la teoría cuántica antigua incluye, amén de Planck, los nombres de Albert Einstein y Niels Bohr (1885-1962). En el *annus mirabilis* de 1905, Einstein aplicó la hipótesis cuántica al estudio de la luz: las ondas lumínicas están compuestas de pequeñísimas partículas (que solo posteriormente recibirían el nombre de fotones), como quedaría testado en el efecto fotoeléctrico. Hasta bien entrado el siglo XIX, la visión corpuscular de la materia, heredada de Newton, había dominado sobre la visión ondulatoria. Hacia 1900 existía una concepción híbrida: los sólidos y los fluidos (líquidos y gases) eran vistos como compuestos de partículas, pero la radiación electromagnética se concebía como ondas. Y ahora resultaba que los físicos tenían que rechazar la concepción clásica de la materia (onda *o* partícula) en pos de una nueva concepción: onda *y* partícula (como en el caso de la luz).

Por su parte, en 1913, Bohr, un becario —gracias a una conocida marca de cerveza— en el laboratorio de Ernest Rutherford (1871-1937), *cuantizó* el átomo a fin de explicar los espectros atómicos. Las rayas discontinuas de los espectros eran consecuencia de la cuantización de la energía de los electrones dentro del átomo. Desgraciadamente, el modelo atómico de Bohr fracasó al aplicarse a átomos multielectrónicos, y los físicos fueron convenciéndose de que era necesario un cambio radical en los fundamentos de la física: una nueva clase de mecánica —que Max Born (1882-1970) denominó *mecánica cuántica*— que pre-

sentase una axiomática coherente independiente de las teorías clásicas y que, por añadidura, superase ese confuso batiburrillo de principios, leyes y recetas de cálculo en que consistía la teoría cuántica antigua.

> «El optimismo lo aprendí de Sommerfeld, la física de Bohr y las matemáticas en Gotinga.»
>
> — Werner Heisenberg.

En 1925, un joven físico llamado Werner Heisenberg (1901-1976), *privatdozent* en Gotinga, sentó las bases de la mecánica cuántica mientras se recuperaba de un severo ataque de alergia retirado en una isla. Heisenberg insistió en que el conjunto de todas las frecuencias y amplitudes de la radiación emitida por un átomo puede considerarse una descripción completa del sistema del átomo, aunque no sea posible interpretarlo en el sentido de una trayectoria electrónica que provoca la radiación, puesto que las órbitas de los electrones dentro del átomo son inobservables. Además, comprobó que estos conjuntos de números (que, matemáticamente, correspondían a los coeficientes de Fourier de la expresión clásica del movimiento del electrón) no conmutaban. Con otros términos: a diferencia de las clásicas, las cantidades cuánticas cumplen, en general, que $QP \neq PQ$. Meses después, dos colegas de Gotinga, el físico Max Born y el matemático Pascual Jordan (1902-1980), reconocieron que estos conjuntos de números Q y P se comportaban como matrices matemáticas, pese a que el propio Heisenberg no sabía siquiera lo que era una matriz (según confesó). La mecánica cuántica matricial creció en el jardín al cuidado de Hilbert. No obstante, Gotinga estaba dividida en dos grupos. Hilbert y los suyos hablaban del gran éxito alcanzado mediante la introducción del cálculo de matrices en física, mientras que otros abominaban del tedioso espíritu matematicoide que inundaba la física atómica.

En la Navidad de 1925-1926, Erwin Schrödinger (1887-1961) alumbró la mecánica cuántica ondulatoria, mientras disfrutaba de un «período tardío erótico» con su última amante (en pala-

bras de Hermann Weyl, su colega en Zúrich). A diferencia de los imberbes físicos y matemáticos de Gotinga, pero al igual que gran parte de la vieja escuela, Schrödinger no se sentía especialmente cómodo con la «mecánica cuántica de los Tres Hombres» (Heisenberg-Born-Jordan). Buscando una teoría más intuitiva,

UN PROBLEMA, DOS SOLUCIONES

Atrevámonos a bucear un poco más profundo para averiguar cómo resolvía cada mecánica cuántica el problema de hallar los diferentes niveles energéticos del electrón del átomo de hidrógeno. En la mecánica matricial había que «diagonalizar» la matriz hamiltoniana H, que mide la energía total del sistema, esto es, determinar una matriz S de manera que la matriz $W=S^{-1}HS$ sea una matriz diagonal; puesto que así los elementos diagonales E_n son los valores energéticos del electrón:

$$W=\begin{pmatrix} E_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & E_n & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Por su parte, en la mecánica ondulatoria, se trataba de resolver la ecuación de ondas de Schrödinger, esto es, la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$-\Delta\psi+V\psi=E\psi,$$

donde ψ es la función de onda (independiente del tiempo), V el potencial y E la energía. Si definimos el operador hamiltoniano como $H=-\Delta+V$ (es decir, la energía cinética más la energía potencial), la ecuación anterior puede escribirse, equivalentemente, $H\psi=E\psi$, que determina lo que se conoce como *problema de autovalores* o *problema de Sturm-Liouville* —porque preocupó a los matemáticos franceses Jacques Charles François Sturm (1803-1855) y Joseph Liouville (1809-1882)—. Se llama así porque esta última ecuación solo admite solución para ciertos valores de ψ y de E, que reciben el nombre de *autofunciones* y *autovalores*, respectivamente.

Autovalores

En la física clásica, los autovalores determinaban, por ejemplo, las frecuencias características de vibración de una membrana elástica, de modo que cualquier vibración pudiera expresarse como superposición de estos modos básicos de

que solo empleara herramientas matemáticas clásicas, descubrió su celebrada *ecuación de ondas*. La chispa surgió al estudiar el movimiento del electrón como si se tratara de un movimiento ondulatorio, cuya función de onda Ψ sería la encargada de describir el estado del sistema. Su trabajo tuvo una acogida excepcional,

oscilación. En física cuántica, los autovalores E_n son, precisamente, los posibles niveles de energía del electrón del átomo de hidrógeno. Las diferencias entre estos autovalores dan las frecuencias de los cuantos de luz (fotones) emitidos, describiendo así la estructura del espectro de radiación del átomo. Por su parte, los diferentes estados del electrón vienen dados por las autofunciones ψ_n asociadas a los autovalores. En matemáticas, al conjunto de autovalores E_n de una matriz o de un operador se le denomina *espectro*. A resultas de una maravillosa coincidencia, el *espectro matemático* (un nombre que Hilbert eligió por casualidad) acabó siendo central para explicar los *espectros físicos* de los átomos. Con sus propias palabras: «Desarrollé mi teoría de infinitas variables e incluso la llamé *análisis espectral* sin ningún presentimiento de que más tarde encontraría una aplicación para el espectro real de la física». Fue una casualidad especialmente afortunada.





Jacques Charles François Sturm (izquierda) y Joseph Liouville.

porque resolver una ecuación diferencial, una cosa que los físicos habían hecho durante siglos, parecía mucho más sencillo que encontrar la solución de ciertas ecuaciones matriciales.

Así pues, el panorama que se les presentaba a los físicos a comienzos de la primavera de 1926 difícilmente podía resultar más paradójico: disponían de dos mecánicas que explicaban y predecían los mismos fenómenos, pese a que cada una de ellas utilizaba un enfoque muy diferente y proyectaba una concepción muy distinta del microcosmos. Si Schrödinger calificaba la mecánica de matrices de «contraintuitiva», Heisenberg no se quedaba atrás y calificaba la mecánica de ondas de «repulsiva». Varios físicos —el propio Schrödinger, Carl Eckart (1902-1973) y Wolfgang Pauli (1900-1958)— se lanzaron a esclarecer la relación formal entre ambas mecánicas. Su conclusión fue que ambos formalismos eran matemáticamente equivalentes, aunque su demostración de que se podían construir las matrices Q y P a partir de las funciones de onda Ψ, así como recíprocamente, no fue del todo correcta.

De hecho, fue mérito de Hilbert reconocer la profunda similitud entre ambos formalismos. Hilbert se rió mucho de Born y Heisenberg porque, cuando descubrieron la mecánica matricial, se encontraron con el mismo tipo de dificultades que, por supuesto, todos los matemáticos encuentran al manipular matrices infinitas. Cuando fueron a pedirle ayuda, les dijo —recordando sus trabajos sobre ecuaciones integrales de veinte años antes— que las únicas veces que había tenido que ver con matrices fue cuando estas aparecían como subproducto del estudio de autovalores de una ecuación diferencial con condiciones de contorno (en otros términos, cuando una ecuación integral se transformaba en un sistema de infinitas ecuaciones lineales). Les sugirió que si encontraban la ecuación diferencial que originaba esas matrices, probablemente obtendrían más información. Heisenberg y Born pensaron que era un comentario para salir del paso, y que Hilbert no sabía realmente de lo que estaba hablando. Así que más tarde Hilbert se divirtió mucho indicándoles que podían haber descubierto la mecánica ondulatoria de Schrödinger seis meses antes que este, si le hubieran hecho caso, claro. Esta fue la senda que, de facto,

Schrödinger, Eckart y Pauli siguieron para mostrar la identidad de las dos teorías desde un punto de vista matemático.

> «El único objetivo de la física teórica es calcular resultados que se puedan comparar con la experiencia [...]. Es totalmente innecesario que deba darse una descripción satisfactoria del curso completo de los fenómenos.»
>
> — Paul Dirac.

En el otoño de 1926, Pascual Jordan y el físico británico Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) comenzaron a elaborar por separado la *teoría de las transformaciones*, a fin de unificar de una vez por todas ambas mecánicas cuánticas. Como las cantidades cuánticas introducidas por Heisenberg definían un nuevo tipo de álgebra para el que la multiplicación no era conmutativa, Dirac decidió llamar *q-números* a las cantidades que así se comportaban (aunque la «q» no era por *quantum*, en inglés, sino por *queer*, que significa «extraño», «poco usual»). Pues bien, el álgebra abstracta de los q-números admitía diversas representaciones o imágenes (a la manera que un mismo sistema de axiomas puede admitir varios modelos), siendo dos de ellas las mecánicas matricial y ondulatoria. El problema es que para asegurar que todas las transformaciones entre imágenes de la mecánica cuántica funcionaban correctamente, Dirac tuvo que recurrir al empleo de un ente matemático ficticio: la función delta. Una función que, en verdad, no era una función. Para los físicos se trataba de una idealización útil, que los matemáticos se encargarían de rigorizar. Para los matemáticos, en cambio, era una noción sospechosa, sin realidad matemática, cuyo uso solo se justificaba por las aplicaciones físicas. A la función delta de Dirac le aguardaba un triste sino, pues hubo de esperar hasta 1950 para encontrar su acomodo dentro de la teoría de distribuciones creada por Laurent Schwartz (1915-2002). Mientras tanto, su falta de rigor dejó helados a los matemáticos de Gotinga.

Y en estas, un joven llamado John von Neumann llegó a Gotinga como ayudante de Hilbert. Tras haberse doctorado con una

brillante tesis sobre teoría de conjuntos, había tomado lecciones de análisis funcional con Erhard Schmidt en Berlín. Por entonces, Hilbert estaba tratando de encontrar un modelo matemático razonable para la mecánica cuántica; pero su tratamiento axiomático iba retrasado porque sufría una anemia perniciosa (una enfermedad mortal en esos años, de la que solo se recuperó gracias a un insólito tratamiento experimental a base de extracto de hígado). A caballo entre 1926 y 1927, solicitó a su asistente en física, Lothar W. Nordheim, que desmenuzara para él el contenido de las últi-

LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

En la mecánica matricial, se trataba de hallar una matriz S de manera que la matriz $W=S^{-1}HS$ fuese diagonal. Si se despeja HS en esta ecuación, queda $HS=SW$. Y, si empleando la regla de multiplicación de matrices se escribe lo que significa esta última ecuación para los elementos de cada matriz, se obtiene un sistema de infinitas ecuaciones lineales (que recuerda al que aparecía al transformar una ecuación integral):

$$\sum_{q=1}^{\infty} h_{pq}s_{qn} = E_n s_{pn}. \qquad [1]$$

Por su parte, en la mecánica ondulatoria se trataba de resolver la ecuación de ondas de Schrödinger $H\psi=E\psi$, determinando los autovalores solución. Si en la ecuación se introduce la autofunción ψ_n asociada al autovalor E_n, se llega a:

$$H\psi_n = E_n\psi_{n.} \qquad [2]$$

Tanto Hilbert como Dirac, una vez que reformularon ambos problemas de esta forma, procedieron a compararlos y observaron que [1] y [2] presentan una estructura semejante: Hamiltoniano × XYZ = Energía × XYZ. En consecuencia, la pregunta que se hicieron fue: ¿qué condiciones hay que asumir para poder igualar término a término la ecuación [1] de la mecánica matricial con la ecuación [2] de la mecánica ondulatoria? Como «integrar» es en el reino de lo continuo lo análogo a «sumar» en el reino de lo discreto (el símbolo ∫ proviene, de hecho, de una sucesiva estilización de la letra s larga), pensaron que lo que debería sustituir —en el paso de lo discreto a lo continuo— al primer miembro de [1] debía ser: $\int h(x,y)\,\psi_n(y)\,dy$. Por consiguiente, la unificación entre ambas mecánicas cuánticas se lograría si esta última expresión coincidiese con el primer miembro de [2], resultando:

mas investigaciones, con el propósito de impartir un curso sobre mecánica cuántica empleando su querido método axiomático. La llegada de Von Neumann dio alas al proyecto. Capitaneados por Hilbert, los tres se embarcaron en la búsqueda de un marco matemático adecuado, completamente riguroso. Así, a lo largo de 1927, escribieron juntos un artículo titulado *Sobre los fundamentos de la mecánica cuántica*. Hilbert quería explotar la formulación integral de los problemas físicos, que le parecía más versátil que la variante diferencial expresada mediante la ecuación de ondas o

$$H\psi_n(x) = \int h(x,y)\psi_n(y)dy,$$

es decir, si todo operador hamiltoniano pudiera escribirse como un operador integral. Pero, ¡esto no era siquiera posible para un operador sencillo como la identidad (definida por $H\psi = \psi$ para toda función de onda)! Dirac no se amilanó ante las dificultades y, para salvarlas, recurrió a la función δ. Esta función singular está definida por $\delta(z)=0$ para todo $z \neq 0$ [3] y, paradójicamente, $\int \delta(z)dz = 1$ [4]. ¿Cómo imaginar una función que vale 0 en todos los puntos menos uno y, sorprendentemente, integra 1? Ahora bien, aceptando esta ficción y tomando $h(x,y) = \delta(x-y)$ como núcleo de la ecuación integral de arriba, puede expresarse la identidad, por ejemplo, como operador integral sin más que aplicar las propiedades mágicas de δ:



Diagrama esquemático de la delta de Dirac: una «función» que vale 0 en todos sus puntos menos en el origen, donde vale infinito, para así integrar 1.

$$H\psi(x) = \int h(x,y)\psi(y)dy = \int \delta(x-y)\psi(y)dy \overset{[3]}{=} \psi(x)\int \delta(x-y)dy \overset{[4]}{=} \psi(x)\cdot 1 = \psi(x).$$

Y, mediante cálculos similares, puede demostrarse que cualquier operador puede representarse como operador integral, de modo que ambas mecánicas cuánticas resultan a fortiori unificadas.

la versión discreta en términos de matrices. Al igual que hiciera el físico húngaro Cornel Lanczos (1893-1974) en 1926 (un mes antes, curiosamente, de que Schrödinger publicara su famosa ecuación), Hilbert, Nordheim y Von Neumann desarrollaron la mecánica cuántica utilizando ecuaciones integrales. Sin embargo, el resultado de este primer acercamiento no fue muy satisfactorio, ya que no pudieron esquivar el callejón sin salida de la delta de Dirac para pasar de una formulación a otra.

Sería Von Neumann en solitario quien concluyese la tarea de fundar axiomáticamente la mecánica cuántica. Lo haría entre 1928 y 1932, publicando una serie de cinco artículos y un monumental tratado, *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*. A fin de dar un soporte matemático firme a la teoría cuántica, rechazó tanto el uso de las funciones delta de Dirac como la predilección por las ecuaciones integrales de Hilbert. Su arma fue otra: el análisis funcional. Creó un marco axiomático abstracto, el *espacio de Hilbert* (llamado así en honor de su maestro), que englobaba los casos particulares matricial y ondulatorio.

Los espacios matemáticos sobre los que se construyeron la mecánica matricial y la mecánica ondulatoria eran muy diferentes: uno era discreto y algebraico; el otro, continuo y analítico. En consecuencia, como se percató Von Neumann, no era de extrañar que la unificación entre ambos no se pudiera lograr sin cierta violencia sobre el formalismo y la matemática. Sin embargo, observó que los espacios de funciones definidos sobre ellos eran, esencialmente, idénticos. En efecto, los estados del átomo se representaban en la mecánica matricial mediante sucesiones de números de cuadrado sumable, de modo que el espacio funcional que estaba detrás era ℓ_2, esto es, el espacio de Hilbert por antonomasia. Más aún, las funciones de onda de la mecánica ondulatoria eran siempre de cuadrado integrable o, lo que es lo mismo, pertenecían al espacio funcional L_2. Y para estos dos espacios era válido el teorema de Fischer-Riesz, bien conocido por los matemáticos desde 1907, que establecía que ambos espacios eran isomorfos. En resumen, Von Neumann resolvió el rompecabezas de la equivalencia matemática entre mecánicas cuánticas al mostrar que la mecánica de Heisenberg —centrada en matrices y sumas— y la mecánica de

LOS ESPACIOS «EQUIPADOS» DE HILBERT

La mecánica cuántica de Von Neumann, impecable para los matemáticos, tropezó con el hecho de que los físicos preferían la mecánica cuántica de Dirac, por cuanto resultaba más útil pese a su carencia de rigor. Con el paso del tiempo, gracias a los trabajos de Laurent Schwartz y Alexander Grothendieck en análisis funcional allá por los años cincuenta y sesenta, las *funciones delta* adquirieron carta de naturaleza matemática al ser formalizadas como funciones generalizadas o distribuciones. Así, el formalismo de Dirac dejó de ser sospechoso matemáticamente, al englobarse dentro de los *espacios de Hilbert «equipados»* (o *tripletes de Gelfand*). La idea es ligar lo mejor del formalismo de Von Neumann (el riguroso espacio de Hilbert) y lo mejor del formalismo de Dirac (la útil función delta) dentro de una estructura matemática consistente. Con este fin, se procura ir más allá del espacio de Hilbert de cara a incorporar objetos tan singulares como la función delta, pero sin perder al mismo tiempo la buena geometría del espacio de Hilbert. La solución consiste en considerar una estructura alrededor del espacio siguiendo el espíritu de la teoría de distribuciones: se toma el espacio de Hilbert usual y se equipa con otros dos espacios, uno más pequeño y otro más grande, que contienen respectivamente todas las funciones *buenas* (funciones *test*) y todas las funciones *malas* (funciones *singulares*, como la δ de Dirac). Al conjunto de estos tres espacios es a lo que se denomina *espacio «equipado» de Hilbert* o *triplete de Gelfand.*

Schrödinger —centrada en funciones e integrales— eran matemáticamente equivalentes al no ser más que cálculos sobre dos espacios de Hilbert isomorfos, idénticos.

Pero Von Neumann hizo mucho más. Hasta entonces se entendía por espacio de Hilbert uno de los dos espacios concretos ℓ_2 o L_2. Él fue pionero en concebir un espacio de Hilbert abstracto, en el sentido actual. Abandonando cualquier representación concreta, trabajó intrínsecamente con las nociones obtenidas directamente de los axiomas, logrando extender la teoría espectral de Hilbert de acuerdo a las necesidades cuánticas.

Hilbert había asentado a principios de siglo las bases del espacio infinito-dimensional. Pero fue un favor de la fortuna que esta teoría matemática tan abstracta, gestada con veinte años de antelación, le viniera como anillo al dedo a la mecánica cuántica.

Desde entonces, la estructura matemática de la física cuántica es solidaria del espacio de Hilbert. La descripción del estado de un sistema cuántico se hace por medio de un vector de ese espacio. Y magnitudes físicas tales como la energía se estudian mediante operadores definidos sobre el espacio de Hilbert. A resultas de la aparición de la mecánica cuántica, la teoría de los espacios de Hilbert quedó fundada axiomáticamente, con el propio Hilbert como testigo de excepción.

CAPÍTULO 4

La crisis de fundamentos

Con la efervescencia de la lógica matemática y de la teoría de conjuntos se consiguió tratar un concepto que hasta entonces se había mostrado intratable: el infinito. Pero con ello se profundizó la fractura que recorría la base de las matemáticas. La proliferación de paradojas mostró que la matemática estaba edificada sobre arena. Los matemáticos se lanzaron entonces a una carrera para refundar su ciencia. Algunos matemáticos tomaron partido por el logicismo de Frege y Russell; el resto se escindió en dos bandos irreconciliables: los intuicionistas, abanderados por Brouwer, y los formalistas, dirigidos por Hilbert.

Hacia 1920, Hilbert viró sus intereses hacia el inquietante territorio de los fundamentos de la matemática. Un campo que cultivó en exclusiva durante los últimos años de su vida como investigador. En cierta manera reanudó con fuerzas redobladas su examen de las bases de la matemática, aunque ahora con unos objetivos mucho más ambiciosos que veinte años antes. No se enfrascó en la tarea en solitario. Lo hizo acompañado por dos fieles escuderos: Paul Bernays (1888-1977), uno de sus asistentes en Gotinga, y Wilhelm Ackermann (1896-1962), un profesor de secundaria que había sido alumno suyo (y a quien rehusó dar un puesto universitario cuando se enteró de que iba a casarse y tener familia, lo que a su juicio le distraería de la investigación). Como parte de esta actividad, el matemático alemán y sus más íntimos colaboradores se vieron envueltos durante el período de entreguerras en una serie de vívidas discusiones con importantes matemáticos europeos que mantenían visiones opuestas a la suya.

Es costumbre anclar el inicio histórico de las reflexiones en torno al quehacer matemático allá por el último cuarto del siglo XIX. Sin embargo, la curiosidad por la naturaleza del conocimiento matemático no es nueva. Es bimilenaria. Así, la primera crisis de fundamentos se produjo en la antigua Grecia, cuando la aritmética pitagórica se resquebrajó. Los pitagóricos pensaban que todos los números eran *racionales*, como casaba con su cosmovi-

sión, pero pronto descubrieron que también había números *irracionales* (como $\sqrt{2}$). El descubrimiento de los inconmensurables hizo añicos su matemática. Los números racionales no agotaban la realidad. El continuo real (una recta, por ejemplo) no está formado por una colección discreta de átomos individuales. Los trabajos en fundamentos de Eudoxo (siglo IV a.C.) alejaron el horror al infinito irracional y pusieron los cimientos sobre los que se edificó la geometría euclídea.

Por su parte, como vamos a comprobar, los trabajos llevados a cabo a propósito de la segunda crisis de fundamentación, ya en el siglo XX, sirvieron para clarificar en qué consiste el método, el rigor y la verdad de la nueva matemática, más axiomática que intuitiva, antes existencial que constructiva. A continuación, como paso previo a conocer la aportación de Hilbert, necesitamos presentar los escollos a que tuvo que hacer frente. Entre ellos, una serie de concepciones de la matemática antagónicas, que no aparecieron de la nada sino que —al igual que la que defendió nuestro protagonista— están enraizadas en la propia evolución de la más segura de las ciencias. La expansión del análisis matemático desde principios del siglo XIX es, en conjunción con el arraigo de la teoría de conjuntos y la lógica matemática, el hilo conductor de una disciplina que se ha dado en llamar *filosofía o fundamentos de las matemáticas*. Pero volvamos por un momento la mirada a los orígenes...

¿ES DIOS UN MATEMÁTICO?

El platonismo es, históricamente, la filosofía originaria de las matemáticas. Platónicos han sido Platón, Cantor, Gödel... entre otros grandes matemáticos. Pero, curiosamente, el primer *platónico* no fue Platón, sino Pitágoras, que creía ciegamente que todo es número y que los objetos matemáticos están dotados de existencia real. Tanto los números como los triángulos o las circunferencias existirían por sí mismos, independientemente de sus instancias y de nuestras mentes. Los neoplatónicos, con san

Agustín (siglo IV d.C.) a la cabeza, aseveraban que la totalidad infinita de los números existía en acto en el intelecto divino, pues ¿quién sería tan necio para afirmar que Dios detiene su cuenta en un cierto número por grande que sea?

El préstamo del término *platonismo* del campo filosófico al campo matemático quedó sellado en una conferencia que la mano derecha de Hilbert, Paul Bernays, impartió en 1934. Bernays quería bautizar con un nombre sugerente el modo de razonar de las matemáticas modernas, en que los objetos matemáticos no se construyen, sino que se toman como dados. Para Cantor, por ejemplo, la realidad de los números era mucho mayor que la realidad del mundo sensorial, ya que los números existían en forma de ideas eternas en el intelecto divino. Gödel iba todavía más lejos y tomaba los conjuntos matemáticos como objetos tan reales como los cuerpos físicos. Para los matemáticos platónicos, que han sido y son legión, los teoremas matemáticos no se inventan sino que se descubren.

El talón de Aquiles del platonismo es que sobrepuebla los cielos. El platonismo funciona bastante bien cuando se trata de defender que realmente existen entes matemáticos sencillos (el triángulo en general, el cuadrado en general o, quizá también, la totalidad de los números naturales). Pero se viene abajo en cuanto abandonamos los objetos de la matemática antigua y pasamos a considerar los artificiosos objetos de las matemáticas contemporáneas: las clases, los conjuntos, las funciones y las complejas estructuras abstractas que fueron saliendo al paso a lo largo del siglo XIX.

EL LABERINTO DEL CÁLCULO

Los griegos fundaron la geometría y subordinaron a ella la aritmética. Pero la aritmética fue independizándose de la geometría gracias al concurso del álgebra, lo que posibilitó, dos mil años después, la reducción inversa. La geometría encontró asiento en el álgebra, que descansaba a su vez sobre la aritmética, reforzada

con el nuevo cálculo de Newton y Leibniz. Pero la *aritmetización* de las matemáticas que se llevó a la práctica entre los siglos XVII y XVIII precisaba de una vuelta al rigor griego, que renunciara a los juegos de manos del cálculo con infinitésimos.

A principios del siglo XIX, la oscuridad del análisis matemático era casi absoluta. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) rompió con la tradición infinitesimal y refundó el análisis sobre las nociones de límite y función. El refinamiento del concepto de función fue simultáneo al desarrollo de las teorías de derivación e integración. Pero el *Curso de análisis* de Cauchy, que vio la luz en 1821, se apoyaba a su vez en la noción de *continuidad*. Tanto el cálculo de límites como el manejo de funciones precisaban de una definición cuidadosa del continuo de números sobre el que se operaba. Pero ¿qué era exactamente el continuo? Las demostraciones de los teoremas fundamentales del análisis necesitaban de una demostración previa de la continuidad de la recta de números reales. Los que enseñaban el cálculo no conocían las demostraciones correctas de los teoremas e intentaban que las mistificaciones oficiales se aceptasen como un acto de fe. Esto ocurría hasta con un teorema tan básico con el de Bolzano (1781-1848), que afirma que si una función continua toma valores de signos opuestos en los extremos de un intervalo, entonces existe un cero de la función en el interior del intervalo. Algo similar sucedía por la misma época con la geometría, y correspondió a Hilbert, según vimos en el capítulo 1, aclarar la noción de continuidad.

Mediado el siglo XIX, el problema fundamental residía, por tanto, en construir los números reales (el continuo) a partir de los números racionales, ya que se sabía cómo construir estos a partir de los enteros, así como los enteros a partir de los naturales. Naturales, enteros, racionales, reales... el total de la matemática. En 1872 se sucedieron las construcciones de los números reales. En primer lugar, la teoría de los números reales que pudo reconstruirse a partir de los apuntes de clase de Weierstrass, que identificaba cada número real con una suma infinita de racionales. En segundo lugar, la teoría de Cantor, análoga a la de Charles Meray (1835-1911), en la que cada número real era el límite de una sucesión de racionales. Y, por último, la teoría de Dedekind, en que

un número real no es sino una *cortadura*, esto es, una partición de todos los puntos de la recta en dos clases, los que están a la izquierda y los que quedan a la derecha del corte. Mientras que los números racionales son porosos, los números reales no lo son: para cualquier corte que hagamos en la recta siempre existe un número real que produce la división de la recta en dos trozos. Si Platón mantenía que Dios geometriza eternamente, Dedekind proponía el lema de que el hombre aritmetiza eternamente. Todos los números se habían reducido, en el fondo, a números naturales. Toda una hazaña intelectual. Pero, ¿qué eran los números naturales?

LA LÓGICA COMO LLAVE MAESTRA DE LAS MATEMÁTICAS

Es dentro de este panorama donde la aritmética asemejaba un árbol que crecía hacia arriba sin cesar, al tiempo que sus raíces se hundían en las profundidades, donde hizo acto de presencia la primera corriente fundacional: el *logicismo*. Para conocerla hay que acercarse a su primer defensor: Gottlob Frege (1848-1925). Este matemático alemán reparó en que toda la matemática descansaba sobre los números naturales; pero, ¿cómo construirlos? La clave estaba, a su juicio, al amparo de la lógica.

Frege pasó su vida como un huraño profesor de la Universidad de Jena. Tenía tan pocos alumnos que durante algún curso solo asistieron regularmente a clase dos, un filósofo y un comandante retirado que estudiaba por *hobby*. Era incapaz de conversar de otra cosa que no fueran la lógica y las matemáticas, y siempre reconducía cortésmente cualquier conversación hacia ellas. Fruto de esta peculiar obsesión fue su *Conceptografía*, publicada en 1879 y que llevaba por subtítulo *Un lenguaje de fórmulas similar al aritmético para el pensamiento puro*. Frege vertió nuevos vinos en los viejos odres de la lógica, creando la «lógica matemática».

La lógica tradicional venía gozando de una mala salud de hierro, pese a que, según todas las apariencias, se hallaba definitivamente concluida desde Aristóteles. Pero la lógica comenzó a

bizquear ante la matemática. Tanto Ramon Llull (1232-1315) en *Ars Magna* como Juan Caramuel (1606-1682) en *Mathesis Audax* habían concebido una suerte de *álgebra lógica* en la que todas las verdades de razón quedarían comprendidas dentro de una suerte de cálculo en una escritura universal, que Leibniz bautizó como *calculus ratiocinator*. No habría necesidad de más controversias entre filósofos, pues estos las solucionarían como si fueran contables. Se sentarían en sus mesas, cogerían sus plumas y se dirían mutuamente: ¡calculemos! Estas semillas germinarían en el *álgebra de la lógica* que George Boole (1815-1864) planteó en *Las leyes del pensamiento*, de 1854.

Pero Frege estaba más interesado en una *lógica del álgebra* que en un *álgebra de la lógica*, y en la *Conceptografía* formalizó la lógica de proposiciones y la lógica de predicados o de primer orden, es decir, de los razonamientos que hablan de ciertos objetos y de las propiedades que satisfacen estos objetos, pero no de las propiedades que a su vez verifican estas propiedades (lo que pertenecería a la lógica de segundo orden). Posteriormente, en *Fundamentos de la aritmética* (1884) sentó las bases del programa logicista, que desarrollaría en los sucesivos volúmenes de *Las leyes fundamentales de la aritmética, deducidas conceptográficamente* (1893-1903). Frege sostenía que la lógica era anterior a la matemática y que, por tanto, los conceptos matemáticos debían ser reducidos a conceptos lógicos. La matemática no era sino un apéndice de la lógica.

Por consiguiente, la aritmética era, en última instancia, lógica, y las nociones aritméticas tenían que ser analizadas en términos puramente lógicos: «calcular es deducir». Con sus propias palabras: «todo teorema aritmético es una ley lógica, aunque derivada». Simplificando el rigor mortis de los escritos fregeanos, en los que la pedantería y la precisión se reparten por igual, puede decirse que Frege vino esencialmente a definir los números mediante clases, es decir, mediante conjuntos o colecciones. A cada número natural le correspondía la clase de todas las clases que eran similares (equinumerables) con una dada. Por ejemplo, el número 3 es lo que tienen en común todas las clases siguientes: las hojas de un trébol normal, los colores de un semáforo, etc.

AXIOMAS DE PEANO



Giuseppe Peano hacia 1910.

En 1888, Richard Dedekind publicó *¿Qué son y para qué sirven los números?*, un influyente libro con sabor logicista del que Hilbert bebió de joven. Sin embargo, Dedekind definió los números naturales de un modo esencialmente diferente a Frege. En 1889, dentro de un libro titulado *Principios de la aritmética, expuestos según un nuevo método*, el matemático italiano Giuseppe Peano recogió el testigo de Dedekind, aunque era desconocedor de su obra, y definió los números naturales por medio de tres conceptos primitivos (el cero, la función sucesor y la igualdad) y cinco axiomas:

1. Cero es un número natural.
2. Cada número natural tiene un sucesor.
3. Cero no es el sucesor de ningún número natural.
4. Dos números distintos tienen distintos sucesores.
5. Si un conjunto *A* contiene el cero y cada vez que contiene un número contiene también el siguiente, entonces *A* contiene todos los naturales.

El quinto axioma recibe el nombre de *principio de inducción* y desempeña un papel fundamental para probar teoremas sobre los números naturales sin tener que comprobarlos para cada uno de ellos, de uno en uno. Este principio formaliza esa intuición de que cuando se tienen todas las fichas del dominó colocadas en hilera, la caída de la primera de ellas (el cero) implica la caída de todas las demás (todos los naturales). A partir de estos axiomas, puede definirse la suma y la multiplicación de números naturales, así como ordenarlos. El resultado es conocido como *aritmética de Peano*.

De este modo, el número 3 puede identificarse con la clase de todas estas clases. En general, Frege identificó el número 0 con la clase de todas las clases vacías, el 1 con la clase de todas las

clases unitarias, etc. Y, puesto que solo hay una clase vacía (que se denota como $\varnothing$), $0 = \varnothing$. El número 1 se definía entonces como la clase de todas las clases equinumerables con la clase $\{\varnothing\}$ que posee un único elemento. De una manera análoga se definía el resto de números.

Desgraciadamente, el audaz programa fregeano sería puesto en entredicho por la proliferación de paradojas lógicas. En sus obras, Frege siempre partía de un principio: el *principio de comprehensión*, que postula que a cada concepto es posible asignarle su extensión, es decir, empleando términos más actuales, que toda propiedad determina la clase de los elementos que satisfacen esa propiedad. Este axioma de existencia de clases era la «Ley Básica V» de *Las leyes fundamentales de la aritmética*, y fue responsable de la colosal defunción del logicismo fregeano. En una carta del 16 de junio de 1902, un joven matemático llamado Bertrand Russell (1872-1970) informaba al profesor Frege de que era posible deducir una contradicción dentro de su sistema a partir de esa maldita ley. La paradoja de la clase de Russell, que explicaremos más adelante, mostraba que hacer corresponder a cada propiedad su clase asociada era, por más natural que pareciera, jugar con fuego. Al conocer la antinomia, Frege añadió un apéndice al segundo volumen de *Las leyes fundamentales de la aritmética* en el que pretendía salvar el grueso de su trabajo restringiendo la aplicación del principio de comprehensión. Pronto se percató de que servía de poco, y paralizó la publicación del tercer volumen de su obra cumbre. Jamás se repondría del golpe. Impregnado de melancolía, reconocería sin esperanza pero sin miedo el desastre:

> Un científico no puede encontrar nada menos deseable que hallar que todo el fundamento de su obra cae precisamente en el momento que le da fin. He sido puesto en esta posición por una carta de Mr. Russell cuando este trabajo se hallaba casi terminado en la imprenta.

Tras esta muestra de integridad intelectual, que Russell admiraría toda su vida, Frege le contestó a vuelta de correo comu-

nicándole que la aritmética, y con ella toda la matemática, volvía a tambalearse. El sentido común no era un faro lo bastante poderoso para mantener a los matemáticos a salvo del riesgo de zozobrar contra los escarpados salientes de la lógica.

LA PROLIFERACIÓN DE PARADOJAS

Hasta la primavera de 1901, cuando Russell tropezó con su propia paradoja, se consideraba, de acuerdo con Frege, que a cada propiedad le corresponde una clase: la clase conformada por las entidades que poseen esa propiedad. Russell estaba estudiando el comportamiento de las clases propias, esto es, aquellas que son miembros de sí mismas. Pongamos por caso, la clase de todas las clases (que, como es otra clase, se autopertenece) o la clase de todos los conceptos (que, como resulta ser otro concepto, también se autopertenece). El vicio lógico es irremediable: si en una biblioteca se coloca un catálogo con tapas negras de todos los libros de la biblioteca que tengan tapas negras, dicho catálogo se autocatalogará.

Tomemos, ahora, con Russell, la clase R de todas las clases que poseen la propiedad de no ser miembros de sí mismas, formalmente: $R = \{x : x \notin x\}$, donde $\in$ es el símbolo de pertenencia. Y preguntémonos si R es miembro de sí misma, si $R \in R$ es el caso. Vamos a comprobar cómo cualquier respuesta implica inmediatamente la contraria. Si lo es, no lo es. Si no lo es, lo es. En efecto, si $R \in R$, es decir, si R se pertenece a sí misma, entonces, por definición, $R \notin R$, esto es, R no se pertenece a sí misma, ya que es la clase de todas las clases con esa propiedad. Pero, recíprocamente, si $R \notin R$, entonces $R \in R$, puesto que cumple la propiedad que define la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas. En suma, se obtiene la contradicción: $R \in R$ si y solo si $R \notin R$. La clase R se pertenece a sí misma si y solo si no se pertenece a sí misma. Russell quedó perplejo ante el absurdo que había descubierto. Una contradicción que posteriormente popularizó con el nombre de *paradoja del barbero*: el barbero de un pueblecillo

presume de que afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos y a nadie más. Entonces, un buen día, al despertar, se pregunta quién le afeita a él y descubre consternado que se afeita a sí mismo si y solo si no se afeita a sí mismo. El pobre barbero se encuentra sumido en un verdadero atolladero lógico.

El matemático francés Henri Poincaré fue el primero en indicar que la fuente de las paradojas que asaltaban la lógica era la circularidad, en forma de autorreferencia o autopertenencia. Las paradojas se sustentaban en el uso de definiciones impredicativas, de definiciones en que lo definido entra en la definición. Es lo que, más tarde, Russell denominó *principio de círculo vicioso*. No es de extrañar, pues, que la violación de este principio conduzca a paradojas, antinomias y contradicciones, muchas de ellas reconocibles incluso fuera de los lenguajes formales, en los lenguajes naturales. Sirva como ilustración la archiconocida paradoja del mentiroso, atribuida a Epiménides de Creta (y a la que incluso san Pablo se refiere en sus cartas). En el verso de un poema, Epiménides censura a los cretenses tildándolos de mentirosos. Pero, siendo él cretense, su afirmación, dicha sobre sí mismo, se transforma en «estoy mintiendo». En este caso, lo que dice no puede ser verdad, por lo que los cretenses no mienten. Pero si no mienten, Epiménides tampoco, por lo que los cretenses por fuerza mienten, y vuelta a empezar.

La *lógica matemática*, como comenzó a llamarse gracias a Peano, solo daba disgustos. Y Poincaré, que la consideraba inútil, se burlaba: «Ya no es estéril; engendra contradicciones». Pese a todo, el programa logicista pergeñado por Frege iba a tener continuación gracias al desparpajo de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead (1861-1947).

En 1900, en un congreso internacional de filosofía celebrado en París, Russell se topó con la reforma simbólica de Peano. En 1889, Peano había presentado sus *Principios de la aritmética*, en los que ofrecía sus famosos cinco axiomas —incluyendo el principio de inducción— para los números naturales, usando un nuevo simbolismo que había diseñado. El simbolismo unidimensional de Peano fue mejor acogido que el simbolismo bidimensional de Frege en la comunidad de lógicos y matemáticos (no así entre

EL HOTEL INFINITO DE HILBERT

El catedrático de Gotinga inventó una metáfora que explica de manera simple y clara algunas de las paradojas relacionadas con el infinito que los matemáticos descubrieron al mismo tiempo que las paradojas lógicas. Pese a que parezca increíble, en un hotel con infinitas habitaciones siempre hay sitio para nuevos huéspedes, aunque el hotel las tenga todas ocupadas. En efecto, si cambiamos al huésped que se encuentra en la primera habitación a la segunda; al de la segunda, a la cuarta; al de la tercera, a la sexta; y así sucesivamente, liberamos todas las habitaciones impares. De modo que, como hay infinitos números impares, no solo hay sitio para un nuevo viajero que llegara a la recepción del hotel, sino también para alojar a una cantidad infinita de viajeros en la misma situación. En el mismo hotel de Hilbert podríamos establecer más conclusiones sorprendentes:

— El hotel tiene todas las habitaciones ocupadas y se marcha un huésped. Entonces, el número de ocupantes sigue siendo el mismo (infinito).

— Si se marchan todos los huéspedes que ocupan habitaciones pares, entonces el número de ocupantes sigue siendo el mismo (infinito).

— Sin embargo, si se marchan del hotel todos los huéspedes que ocupan las habitaciones, por ejemplo, de la quinta en adelante, entonces no queda el mismo número de ocupantes (ya solo habría una cantidad finita).

Todo esto nos advierte de la gran flexibilidad del infinito matemático y del cuidado que hay que poner al realizar afirmaciones sobre él.

sus alumnos, que estallaron en rebeldía y ni siquiera se calmaron cuando Peano les ofertó el aprobado general a cambio de que le permitieran continuar dando clase empleando su notación). En 1902, fiel al logicismo de Frege y al simbolismo de Peano, Russell publicó *Los principios de la matemática*. Pero la luna de miel con la lógica duraría poco, pues poco antes de darlos a la imprenta descubrió la paradoja que lleva su nombre. Hasta 1910, Russell trabajó codo con codo con Whitehead. Ambos matemáticos sudaron tinta para salvar las contradicciones que las paradojas habían puesto al descubierto. Con los *Principia mathematica* (1911-1913) sondearon más que nadie hasta la fecha los funda-

mentos de las matemáticas. Esta obra deslumbrante significó, en palabras de Hilbert, «la coronación de la axiomatización».

Para soslayar las paradojas, Russell y Whitehead fabricaron una teoría de tipos, que exige que para que $X \in Y$ sea una fórmula bien formada, los valores de Y han de ser del tipo inmediatamente superior al tipo de valores de X. De esta manera, la proposición «la clase de todas las sillas no es una silla» no es verdadera ni falsa, sino carente de sentido, porque sillas solo pueden ser los objetos, no las clases de objetos. En otras palabras: se está cometiendo el error de predicar una propiedad de un tipo a otro tipo. Aplicando esta alambicada teoría, los autores certificaron que las formulaciones que conducen a la paradoja de Russell dejan de tener sentido: $R \in R$ es, ahora, una fórmula mal formada, al no haber más que un tipo implicado.

«Las matemáticas poseen no solo la verdad, sino la suprema belleza, una belleza fría y austera, como la de una escultura.»

— Bertrand Russell.

En los *Principia*, evitadas las paradojas, Whitehead y Russell pasaron a deducir la matemática de la lógica, pues a su entender no era posible trazar una raya entre ambas. Desde un punto de vista técnico, el proyecto de logificación de los teoremas matemáticos se topó con numerosas dificultades. Es así que necesitaron de un desarrollo más que concienzudo para lograr demostrar —¡en la página 379!— que $1 + 1 = 2$. Toda una locura. Además, tuvieron que ampliar la lógica a una teoría generalísima de relaciones que absorbía en su seno axiomas tan poco satisfactorios, tan ad hoc, como los de reducibilidad e infinitud. El ortopédico axioma de reducibilidad funcionaba como una suerte de deus ex machina, que los autores justificaban pragmáticamente para torear las antinomias y logificar las matemáticas: cuando una fórmula era demasiado complicada, se asumía que siempre podía simplificarse a otra de un tipo inferior.

El axioma de infinitud era, por su parte, necesario para definir los números naturales al completo. Siguiendo a Frege, definieron

el 2 como la clase de todos los pares, el 3 como la clase de todos los tríos... Pero se vieron obligados a introducir un axioma que postulara que para todo número existe otro mayor, y cuya justificación no podía descansar en ninguna clase de intuición lógica o matemática (lo que sería una petición de principio: la lógica o la matemática fundándose a sí misma) sino en la propia estructura del mundo, al que se le prescribía que había de contener infinitos objetos. Si no existieran infinitas cosas en el mundo y este tuviera un máximo de n cosas, Russell y Whitehead serían incapaces de definir el número $n+1$, ya que la clase de todas las $(n+1)$-tuplas sería vacía al no haber $n+1$ objetos en el mundo. Hermann Weyl, discípulo de Hilbert, lo denunció con toda claridad: los *Principia* ponían a prueba la fe apenas algo menos que los primeros Padres de la Iglesia.

El balance fue que, en el mejor de los casos, Russell y Whitehead lograron reducir la matemática a una especie de *megalógica*, de paraíso de los lógicos. Para decirlo contundentemente: la tesis logicista, o bien es falsa, si la lógica no incluye una teoría de clases (lo que en el próximo parágrafo llamaremos *teoría de conjuntos*), o bien es trivial, si la incluye. A día de hoy, algunos lógicos tratan de resucitar esta tesis poniendo todo su empeño en traducir las matemáticas a una lógica de segundo orden adecuada (ya que la lógica de primer orden se mostró insuficiente); pero, como muchos matemáticos han objetado, la lógica de segundo orden no es más que una matemática de conjuntos disfrazada con piel de cordero. Como en la lógica de segundo orden se puede predicar no solo de objetos sino también de propiedades, pueden definirse múltiples nociones típicamente conjuntistas. Cuantificar sobre propiedades es, en último término, cuantificar sobre conjuntos, sobre el conjunto de objetos que verifican la propiedad. Se trata, entonces, de una lógica subyacente a la propia teoría de conjuntos. Su mayor potencia expresiva, que permite caracterizar la infinitud o formalizar el principio de inducción en un único axioma (en lugar de en un esquema de axioma que resume infinitos), es un arma de doble filo. Estamos donde estábamos: si la lógica incluye la teoría de conjuntos, la tesis logicista es verdadera pero trivial; si la lógica no la incluye, es radicalmente falsa.

EL NACIMIENTO DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Los lógicos hacían auténticos malabarismos para resolver el problema de las paradojas, pero ¿qué solución daban los matemáticos? Si los lógicos querían *logificar* la aritmética, los matemáticos querían *conjuntivizarla*. Pero la *conjuntivización* de la matemática venía de lejos. La teoría abstracta de conjuntos fue creada por Cantor, pero el enfoque conjuntista en matemáticas era anterior. Estaba en Riemann, pero sobre todo en Dedekind. Riemann había propuesto la noción de variedad, en un sentido colindante con el de conjunto, como fundamento de toda la matemática pura. Y Dedekind había ofrecido un planteamiento conjuntista del álgebra al introducir nociones tales como las de grupo, cuerpo e ideal (solo la noción de anillo se le escapó de las manos, y sería introducida por Hilbert).

La época heroica de la teoría de conjuntos arranca en 1872. Ese año, cuando publicaron sus respectivas construcciones de los reales, Dedekind y Cantor iniciaron su tormentosa relación personal. En 1874, Cantor demostró que hay dos tipos de infinito: numerable (como el conjunto de los números naturales) y no numerable (como los números reales, esto es, como el continuo). Además, publicó que el conjunto de números algebraicos es numerable, y lo demostró empleando una prueba que Dedekind le había hecho llegar por carta, aunque sin reconocerle mérito alguno (esta puñalada por la espalda fue la causa más probable de la ruptura de su amistad). En 1879, Cantor presentó la noción de *cardinal de un conjunto*, que generaliza, por así decirlo, el concepto de número de elementos de un conjunto al campo de los conjuntos infinitos. Una forma de averiguar si dos conjuntos finitos poseen el mismo número de elementos consiste en extraer a la vez un elemento de cada uno de ellos tantas veces como sea posible. Si ambos conjuntos se acaban a la vez, sabemos con certeza que tienen el mismo número de elementos o cardinal. Como esta idea no recurre a contar con números, es perfectamente extensible a conjuntos infinitos: dos conjuntos A y B se dice que tienen el mismo cardinal, y se escribe $|A| = |B|$, si puede establecerse entre ellos una biyección, esto es, una correspondencia uno-a-uno.

ARGUMENTO «DIAGONAL» DE CANTOR



Georg Cantor.

Uno de los grandes descubrimientos de Georg Cantor fue la existencia de conjuntos no numerables, que no pueden ponerse en biyección con los números naturales. Uno de ellos es el continuo. Mientras que los números enteros y racionales son numerables, los números reales ya no lo son. No pueden emparejarse uno a uno con los números naturales, es decir, no pueden enumerarse, ponerse en una lista, uno detrás de otro. Consideremos la recta real y tomemos el intervalo entre 0 y 1. Expresemos todos los números comprendidos en código binario, es decir, mediante sucesiones de 0 y 1. Por ejemplo: 101001000... (prescindiendo del 0 y de la coma decimal que precedería a la expresión). Vamos a demostrar que la suposición de que se trata de un conjunto numerable conduce a una contradicción. En efecto, si lo fuera podríamos escribir todos sus elementos en una lista como la siguiente:

1.° → 0100...
2.° → 0110...
3.° → 1101...
... ...

Fijémonos ahora en los elementos de la diagonal principal, que hemos subrayado. Vamos a construir un elemento que, a pesar de ser una sucesión de 0 y 1, no está en la lista. Para ello, formemos la sucesión compuesta por los siguientes números: como el primer término destacado era un 0, pongamos un 1; como el segundo era un 1, un 0; como el tercero era un 0, un 1; etc. El elemento resultante empieza por 101... y no coincide con ninguno de los elementos de la lista. En efecto, no puede ser la primera sucesión, porque el primer término es distinto; tampoco la segunda, porque hemos variado el segundo término; ni la tercera, etc. Esto contradice el supuesto de que se trataba de un conjunto numerable y, por tanto, expresable en forma de lista. El método de demostración empleado recibe el nombre de *diagonalización* e influyó en otras demostraciones posteriores relevantes en la historia de los fundamentos de la matemática.

Mientras tanto, Dedekind dio con una definición de conjunto infinito más acertada que la de Cantor. Pasado el tiempo y limpias de errores, ambas definiciones se demostraron equivalentes (en virtud del *axioma de elección*, del que tendremos ocasión de hablar más adelante). Para Cantor, un conjunto es infinito si no es finito, esto es, si no puede ponerse en biyección con algún número natural. Por contra, para Dedekind, retomando sugerencias de Galileo y Bolzano, un conjunto es infinito si y solo si puede ponerse en biyección con una parte propia suya. Por ejemplo, los números naturales son infinitos porque son biyectables con los números pares, haciendo corresponder al 0 el 0; al 1, el 2; al 2, el 4; y, en general, a cada número n, su doble $2n$.

«Es el más fino producto del genio matemático y uno de los logros supremos de la actividad intelectual humana pura. Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.»

— David Hilbert sobre el trabajo matemático de Georg Cantor, en *Sobre el infinito* (1925).

Para finales de 1882, Cantor tenía elaborada su aritmética de cardinales y ordinales (transfinitos), así como planteada la hipótesis del continuo. Los números naturales forman el conjunto infinito más pequeño que nos es dado imaginar. En consecuencia, su cardinal, que es el primer cardinal infinito, se denota con la letra *alef* del alfabeto hebreo y el subíndice 0: $\aleph_0$. Este cardinal corresponde a todos los conjuntos numerables y se trata del primer jalón en la carrera hacia el infinito. El cardinal del continuo, de los números reales, es —por razones que aquí no podemos explicar— $2^{\aleph_0}$. En estas condiciones, la hipótesis del continuo establece que no hay ningún infinito distinto entre los naturales y los reales, o dicho de otra manera, que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. La secuencia de cardinales $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,... funciona como una suerte de metro patrón para medir el tamaño en el universo de los conjuntos, donde hay infinitos infinitos. Los esfuerzos infructuosos orientados a demostrar la hipótesis del continuo y los persistentes ataques de Kronecker a la teoría de conjuntos transfinitos perturbaron considerablemente a Cantor, provocán-

dole una crisis depresiva que le distanció de la matemática y le empujó a la teología (aunque también se dedicó a defender con ahínco que Bacon era el verdadero autor de las obras de Shakespeare).

A partir de 1900, la teoría cantoriana se convirtió, al igual que la lógica, en un puente sobre aguas turbulentas. Paralelamente a las paradojas lógicas, surgieron las antinomias de la teoría de conjuntos. De hecho, la mayoría de paradojas que hablaban de clases encontraron su reformulación mediante conjuntos (así, por ejemplo, la paradoja de Russell). Pero aparecieron también algunas nuevas: las paradojas del infinito. Mientras que las paradojas lógicas tenían que ver con la circularidad en la definición de ciertas clases, las paradojas conjuntistas lo hacían más bien con el infinito. La principal de todas ellas es la paradoja de Cantor acerca de la colección de todos los conjuntos. Sea V el «conjunto» de todos los conjuntos. Como, según demostró Cantor, el cardinal de cualquier conjunto es estrictamente menor que el cardinal de su conjunto potencia (que se denota por $\wp(A)$ y comprende todos los subconjuntos o partes de A), se tiene que $|V| < |\wp(V)|$. Pero, por otra parte, por la definición de V, se tiene que el conjunto potencia de V ha de estar contenido en V, porque V es el conjunto total, el más grande, el que engloba a todos los demás, y nada hay más allá de él. En consecuencia, $|V| \geq |\wp(V)|$. Lo que es un absurdo, una contradicción, con el resultado anterior.

Ernst Zermelo (1871-1953) fue el primer matemático en vislumbrar una salida no logicista al laberinto (no en vano había descubierto una paradoja similar a la de Russell): había que pasar de una teoría intuitiva a una teoría axiomática de conjuntos. Zermelo, que desde 1897 se encontraba en Gotinga, siguió fielmente las instrucciones de Hilbert, quien le animó a formular un sistema de axiomas para la teoría cantoriana. Su aplicación del método axiomático a la teoría de conjuntos es comparable a la de Hilbert en geometría. En 1908, Zermelo presentó la primera axiomatización de la teoría de conjuntos, ligeramente pulida por Abraham Fraenkel (1891-1965) en 1922 (y por Von Neumann en 1925, al incorporar el *axioma de regularidad o fundamentación*). Desde entonces se conoce por sus iniciales, como axiomática *ZF* para la teoría de conjuntos.

Pues bien, en *ZF*, la paradoja de la clase de Russell se transforma en la demostración de que esa clase no es un conjunto, con otras palabras, de que no existe dentro de la teoría, con lo que la antinomia se evapora en el aire. En efecto, si suponemos que R es un conjunto y llegamos a un absurdo, es que R no es un conjunto. Análogamente, la paradoja de Cantor se transforma en la demos-

CLASES Y CONJUNTOS

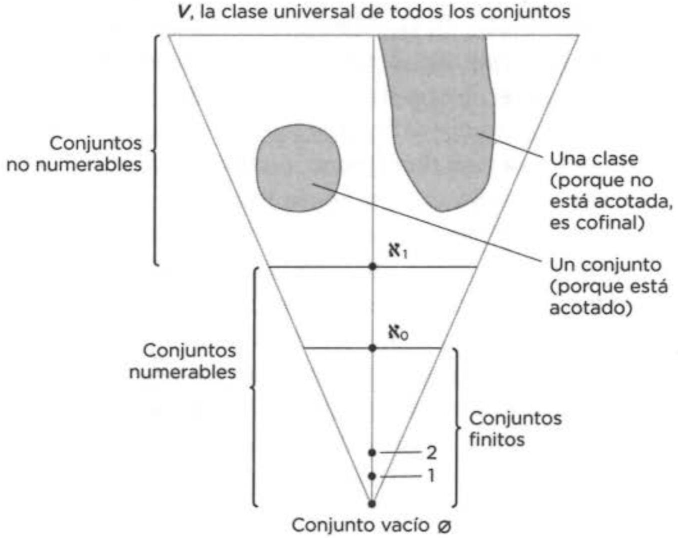
La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel parte de la lógica de primer orden con igualdad y toma la relación de pertenencia $\in$ como primitiva. Los axiomas de *ZF*, enunciados verbalmente, son los siguientes:

1. Dos conjuntos son idénticos si tienen los mismos elementos (axioma de extensión).
2. Existe el conjunto vacío $\varnothing$.
3. Dado un conjunto x y una propiedad formalizable en el lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos, existe el conjunto de todos los elementos de x que satisfacen la propiedad (axioma de extracción o comprehensión).
4. Si x e y son conjuntos, entonces el par no ordenado $\{x, y\}$ es un conjunto.
5. La unión de un conjunto de conjuntos es un conjunto.
6. Se puede formar el conjunto potencia de cualquier conjunto, esto es, la colección de todos los subconjuntos o partes de cualquier conjunto es otro conjunto.
7. Existe al menos un conjunto infinito (axioma de infinitud).
8. La imagen de un conjunto por una función es un conjunto (axioma de reemplazo).
9. x no pertenece a x (axioma de fundamentación o regularidad).

Si a estos axiomas se les añade el llamado *axioma de elección*, se tiene el sistema *ZFC* (la «C» por *choice*, elección en inglés). En los años treinta la teoría de conjuntos *ZFC* fue ampliada por la teoría de clases y conjuntos de Von

tración de que el «conjunto» de todos los conjuntos *V* no es un conjunto, por lo que tampoco existe dentro de la teoría. En *ZF*, un acertijo como el del barbero evidencia, por así decir, la inexistencia de un individuo con esas características. Aún más: los axiomas de *ZF* bloquean la circularidad que precipita mediante diversas estrategias en la inconsistencia de las paradojas. Las fórmulas

Neumann-Bernays-Gödel (conocida entre los matemáticos por el acrónimo *NBG*). Von Neumann propuso una construcción jerárquica y acumulativa del universo de los conjuntos, que suele representarse esquemáticamente como un cono invertido (ver figura). A partir del conjunto vacío e iterando -mediante una recursión transfinita— las operaciones «partes de» y «unión de», construyó todos los pisos en que habitan estratificadamente los conjuntos, desde los más pequeños hasta los más grandes: 0=∅, 1={0}={∅}, 2={0,1}={∅,{∅}}, etc. En esta teoría, las paradojas de Russell y Cantor demuestran que *R* y *V* no son conjuntos sino clases, que sí son admitidas dentro de la teoría. Los elementos cofinales con la jerarquía no son miembros de ningún otro conjunto, porque son demasiado grandes, y corresponden a las clases.



Construcción jerárquica del universo de los conjuntos elaborada por Von Neumann.

del estilo $R \in R$ están prohibidas en *ZF*, puesto que el axioma de fundamentación o regularidad establece que ningún conjunto se pertenece a sí mismo. Simbólicamente: $\forall x (x \notin x)$. Con este axioma, los conjuntos peligrosos simplemente no existen.

En el haber de *ZF* hay que consignar que, además de desactivar las paradojas de la teoría informal de conjuntos, permitió proseguir la conjuntivización de la matemática: con la definición de una función como un conjunto de pares ordenados, ofrecida por Felix Hausdorff (1868-1942) y Kazimierz Kuratowski (1896-1980) algo más tarde, esta noción —pilar de todo el análisis— quedó conjuntivizada, lo que afianzó la fundamentación conjuntista de las matemáticas. Toda la vertiginosa variedad de estructuras matemáticas quedó reducida a sus componentes más básicos, los conjuntos.

Sin embargo, los trabajos de Zermelo levantaron un gran revuelo y causaron reacciones muy adversas entre los especialistas. Buscando probar la hipótesis del continuo, Zermelo había dado forma en 1904 al *axioma de elección*. Este axioma establece que es posible seleccionar simultáneamente un elemento de cada conjunto de una colección infinita de conjuntos no vacíos. Formalmente, si $S = \{A, B, C, \dots\}$ es una colección de conjuntos no vacíos, existe un conjunto Z que consta precisamente de un elemento de A, uno de B, uno de C, etc. Bertrand Russell lo explicaba con la siguiente imagen: imaginemos un millonario que, cada vez que compra una caja de zapatos, compra una caja de medias. Supongamos, además, que ya posee una colección infinita de cajas de zapatos y otra igual de cajas de medias. Si desease comprobar que efectivamente tiene igual número de cajas de zapatos y medias, podría ir sacando el zapato derecho de cada caja de zapatos y emparejándolo con una media de una caja de medias recién abierta (si las cajas de zapatos y de medias sin abrir se agotasen al tiempo, sabría que posee igual cantidad). Pues bien, esto último no puede llevarlo a cabo sin emplear el *axioma de elección*, porque este axioma es lo que posibilita realizar *infinitas elecciones arbitrarias* en la colección de cajas de medias (pues, mientras que en cada caja de zapatos siempre puede seleccionar el derecho, no hay diferencia alguna entre las medias al no existir una media derecha distinta de una media izquierda).

A pesar de su aparente inocencia, el axioma de elección tiene algunas sorprendentes y contraintuitivas consecuencias. Una de ellas es, como ejemplificó Zermelo, el teorema del buen orden, que asegura que todo conjunto por raro que sea puede ser bien ordenado, es decir, ordenado linealmente a la manera de los números naturales, donde cualquier subconjunto posee siempre un primer elemento. Pero hay más: el axioma de elección pronto se mostró necesario para probar que la aritmética de cardinales funciona correctamente (que dos cardinales cualesquiera siempre son comparables), así como para demostrar, a través del lema de Zorn, múltiples resultados básicos del álgebra y del análisis. Esto dio pie a una disputa internacional entre partidarios y detractores del axioma de elección (que incluso encontró su reflejo en un número especial de *Mathematische Annalen*, revista editada por Klein y Hilbert). Por un lado, defendiendo esta potente herramienta, Zermelo, Russell y Hilbert. Por otro, combatiendo su uso indiscriminado, un joven matemático neerlandés llamado Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), que contaba con el respaldo de importantes matemáticos franceses: René-Louis Baire (1874-1932), Émil Borel (1871-1956) y Henri Lebesgue. Si las Islas eran de los logicistas, el Continente se lo repartieron entre los formalistas, conducidos por Hilbert, y los intuicionistas, encabezados por Brouwer.

BROUWER, LA NÉMESIS DE HILBERT

Brouwer cuestionaba que las «cabriolas zermelianas» sirvieran para fundamentar las matemáticas con seguridad, de una vez por todas. Su preocupación no era otra que los castillos en el aire que venían construyéndose en las matemáticas abstractas de los últimos veinticinco años. No le faltaba razón respecto a los riesgos del axioma de elección. Gracias a él saldrían a la luz múltiples *monstruos matemáticos*. Entre ellos, algunos años más tarde (en 1926), la paradoja de Banach-Tarski. El teorema oculto tras ella, que hace uso indispensable del controvertido axioma, produce la

siguiente descomposición paradójica de conjuntos en el espacio tridimensional: una esfera sólida puede descomponerse en un número finito de partes disjuntas, de tal modo que a partir de ellas pueden reconstruirse dos esferas idénticas a la original. Se trata, por recrearlo irónicamente, de la contrapartida matemática del milagro bíblico de los panes y los peces (lo único que asegura la cordura es que las dos esferas idénticas a la original no son medibles en el sentido de Lebesgue, con lo que la paradoja nunca aparece a la hora de calcular volúmenes).

En 1907, en la Universidad de Ámsterdam, Brouwer obtuvo el grado de doctor con la disertación «De los fundamentos de las matemáticas», en la que apuntaba maneras intuicionistas. Cinco años más tarde, convertido en un matemático consagrado, con un enorme bagaje científico a su espalda, dictó la lección inaugural del curso académico 1912-1913, que tituló «Intuicionismo y formalismo». Esta conferencia, pronunciada el 14 de octubre de 1912, marcó el inicio de su plan de fundamentación de la matemática y fue, de hecho, la primera vez en que aparecieron los rótulos «intuicionismo» y «formalismo». En ella, Brouwer reivindicó a Kant, Kronecker y al recientemente fallecido Poincaré —un rosario de estrellas— como antecedentes de su posición.

Con las aportaciones de Gauss, Riemann y, finalmente, Hilbert, la geometría había conseguido liberarse definitivamente del yugo euclídeo kantiano (pese a la protesta de Frege). Brouwer propuso abandonar el apriorismo kantiano del espacio, pero adhiriéndose más resueltamente al apriorismo del tiempo. Las matemáticas se ocupaban del conocimiento de las propiedades del tiempo, puesto que el discurrir temporal se plasmaba en la sucesión aritmética 0, 1, 2, 3, 4... El 1 *después* del 0, pero *antes* del 2. Y así sucesivamente.

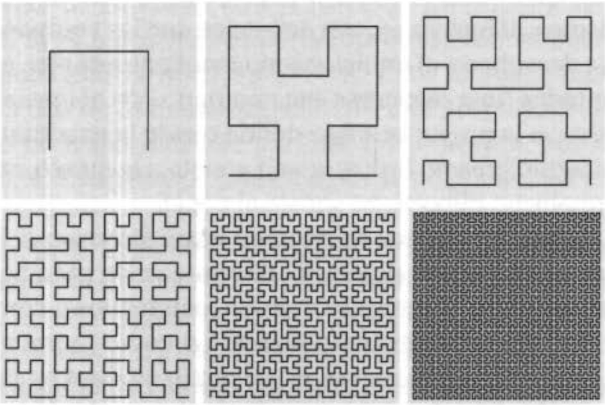
Para Brouwer había que recuperar la visión constructivista de las matemáticas de Poincaré. Pese a traducir y adaptar los trabajos de Cantor al francés, Poincaré había tenido que hacer frente a los epigramas en su contra de Russell o Zermelo, quienes le habían tachado de retrógrado e ignorante del nuevo hacer matemático. Pero Poincaré no se había quedado callado y había contestado mofándose de la corriente logicista: «la lógica no es

LA CURVA DE HILBERT

En 1877, Cantor construyó una biyección entre un segmento y un cuadrado. En el segmento había tantos puntos como en el cuadrado. La posibilidad de establecer una correspondencia uno-a-uno entre la recta unidimensional y el plano bidimensional le hizo exclamar: «¡Lo veo pero no lo creo!». Yendo más lejos, Du Boys-Reymond dijo que «repugnaba al sentido común». Entre 1890 y 1891, Peano y Hilbert imaginaron sendas curvas continuas capaces de recorrer cada punto de un cuadrado. Las curvas de Peano o Hilbert (líneas unidimensionales capaces de rellenar cuadrados bidimensionales) no hicieron sino ahondar el problema de la dimensión. ¿Cómo distinguir entre una y dos «dimensiones»? Poincaré apuntó la necesidad de una definición adecuada de dimensión.

Brouwer y la topología

Entre 1908 y 1911, Brouwer se tomó una pausa en su defensa a ultranza del intuicionismo y sentó los pilares de una nueva disciplina matemática: la topología, una especie de geometría sobre hojas de caucho (por emplear la feliz expresión de Poincaré). Primeramente se dedicó a ofrecer varios contraejemplos que echaban por tierra la mayor parte de los resultados que Arthur Schoenflies (1853-1928), amigo de Hilbert, creía haber encontrado. Y, ya en 1911, presentó el teorema de invariancia de la dimensión bajo aplicaciones bicontinuas, esto es, homeomorfismos, lo que ponía fin a las dudas que habían sembrado Cantor, Peano y Hilbert: el espacio m-dimensional y el espacio n-dimensional no son homeomorfos si m es distinto de n. Podrán ser biyectables, pero jamás homeomorfos, porque esa biyección no será continua. La topología daba la razón al sentido común.



Tras cada iteración la curva de Hilbert serpentea más y más, llegando —en el límite— a recubrir el cuadrado por completo.

estéril, engendra contradicciones», había escrito con regocijo. Además, había apuntado que si todas las matemáticas pudieran ser derivadas empleando solo las reglas de la lógica, resultaría que la matemática no sería más que una gigantesca tautología, una verdad lógica del estilo de $A=A$. Desde su punto de vista, la lógica recordaba a una máquina de fabricar salchichas, a cuya entrada se mete el cerdo y sale una ristra bien ordenada. Pero las matemáticas no funcionaban como una pianola. La demostración matemática constituía un mecanismo genuinamente creador, gracias a esa intuición que nos permite probar infinitos silogismos en un número finito de pasos: el principio de inducción. Este salto de lo finito a lo infinito es lo que posibilitaba, a juicio de Poincaré, la maravilla de las matemáticas. La intuición es ese relámpago que ilumina al matemático en mitad de la noche y fecunda la invención matemática. Es la mente humana la que crea, por vía de la intuición, los objetos matemáticos.

«El arte de hacer matemáticas consiste en encontrar ese caso especial que contiene todos los gérmenes de la generalidad.»

— David Hilbert.

Brouwer retomó la pintoresca filosofía de las matemáticas de Poincaré, a quien había conocido personalmente en 1909. Frente al platonismo y al logicismo, que defienden que las verdades matemáticas se descubren, el intuicionismo mantiene que son, en realidad, inventadas (una respuesta que comparte con el formalismo). Sin embargo, a la pregunta sobre dónde reside la exactitud matemática, el intuicionismo brouweriano apunta a la mente, mientras que el formalismo hilbertiano señala al papel.

Dos fueron los puntos de fricción entre Brouwer y Hilbert, quienes se conocieron en persona durante unas vacaciones en 1909. Por una parte, la naturaleza de las matemáticas: como libre construcción del entendimiento humano o como teoría axiomática. Por otra, el papel del principio de tercio excluso en matemáticas. El nervio del intuicionismo es, precisamente, la negación de este principio lógico que está en Aristóteles y que afirma que

la disyunción de una proposición y su negación es una verdad lógica, es decir, es siempre verdadera, en cualquier modelo o universo de interpretación. Formalmente: $\models A \vee \neg A$. De otra manera: o bien A es verdadera, o bien la negación de A lo es, porque cualquier tercera opción queda sistemáticamente excluida (por esto, precisamente, se habla de «tercio excluso»). Junto al principio de no contradicción ($\models \neg(A \wedge \neg A)$) y al principio de identidad ($\models \forall x(x = x)$), este principio formaba las tres leyes clásicas del razonamiento.

Sin embargo, para Brouwer esto no tenía por qué ser así. Por ejemplo, como no sabemos si la expansión decimal de π contiene veinte ceros seguidos, la proposición «la expansión decimal de π contiene veinte ceros seguidos» no es —en clave intuicionista— ni verdadera ni falsa. Su valor de verdad no puede ser zanjado a día de hoy. Un correligionario de Brouwer afirmaba que el principio de tercio excluso para este tipo de proposiciones podía ser válido para Dios, que conoce toda la secuencia infinita de decimales tal como es y de un solo vistazo, pero no podía serlo para la lógica humana. Una lógica que, dando un giro de ciento ochenta grados al dogma logicista, los intuicionistas consideraban como una rama de la matemática y no al revés.

Esta forma de pensar inauguró lo que se conoce desde entonces como «lógica intuicionista», formalizada por un aplicado estudiante de Brouwer: Arend Heyting (1898-1980). En la lógica clásica, la doble negación de una proposición es equivalente a la proposición, es decir, $\neg\neg A \leftrightarrow A$. Pero la lógica intuicionista rechaza que de la doble negación de una proposición pueda deducirse la proposición de partida. No se acepta, por tanto, que $\neg\neg A \rightarrow A$. Esta revisión intuicionista de la lógica clásica responde a que Brouwer rechazaba los razonamientos por reducción al absurdo (que, según comentamos en el primer capítulo, Hilbert empleaba con frecuencia). No por demostrar la falsedad de la negación de A se seguía que A era verdadera, puesto que se había abandonado el principio de tercio excluso.

El matemático neerlandés solamente aceptaba como válidas las demostraciones constructivas. Demostrar que la negación de un teorema es contradictoria no equivalía a demostrar que el

teorema es verdadero, porque para probar esto último había que construir explícitamente su contenido. Para los matemáticos intuicionistas, las demostraciones de existencia no constructivas —por reducción al absurdo— informan de que en el mundo hay un tesoro escondido, pero no descubren su localización, razón por la cual gozan únicamente de un valor heurístico. Para que un objeto matemático exista no basta con que no engendre ninguna contradicción, es necesario aportar un procedimiento efectivo de construcción.

Las paradojas descubiertas en el contexto de la teoría de conjuntos ofrecían evidencia tajante, en opinión de Brouwer, de los peligros de la matemática meramente existencial. No en vano, Kronecker siempre había argüido enconadamente frente a Cantor que, si no construía los conjuntos de que hablaba (y no podía hacerlo, dado que la gran mayoría de ellos eran infinitos), los teoremas de la teoría de conjuntos se evaporarían en el aire. Era obligado regresar a la senda de la matemática griega, que era en esencia intuicionista; porque era constructiva y el infinito solo hacía acto de presencia en un sentido potencial, nunca actual. Gauss ya había expresado una opinión similar con anterioridad: «Protesto contra el uso de una cantidad infinita como si se tratase de una entidad real, lo cual nunca es lícito en matemáticas; lo infinito es solo una *façon de parler* (una manera de hablar)». Para los intuicionistas todas las dificultades en los fundamentos de la matemática nacían del uso del infinito como algo acabado y perfecto. Un abuso que se comete cuando se define un número real como, por ejemplo, el número $\pi = 3{,}141592\ldots$ Estos puntos suspensivos colocados después de las primeras cifras decimales nos transmiten la falsa sensación de que estamos ante un objeto cerrado.

En resumen, se trataba de reconstruir la matemática clásica hasta donde fuera posible, sin apelar al principio del tercio excluso y a la reducción al absurdo. En 1918, Brouwer comenzó su plan, que denominó «segundo acto de intuicionismo» (el «primero» era el énfasis en la fundamentación intuitiva de la matemática), con el artículo «Fundamentación de la teoría de conjuntos independientemente del principio del tercio excluso». Agarrándose al intuicionismo kantiano del tiempo, Brouwer se asentó en la enu-

merabilidad temporal y solo reconoció la posibilidad de conjuntos numerables, considerando los conjuntos no numerables como contraintuitivos. Como dijera Kronecker: «Dios creó los números naturales, todo lo demás es obra del hombre». Los conjuntos no numerables no debían manejarse, a riesgo de incurrir en graves paradojas. En la teoría de conjuntos intuicionista, los conjuntos reciben el nombre de *especies*, y las únicas colecciones de números permitidas son las finitas: {0}, {0, 1}, {0, 1, 2}... En ningún caso está permitido formar de golpe la colección de todos los números naturales {0, 1, 2, ...}. En consecuencia, los *alefs* cantorianos desaparecen en la niebla.

> «¡El infinito! Ninguna otra cuestión ha inspirado tan profundamente al espíritu del hombre; ninguna otra idea ha estimulado tan fructíferamente su intelecto; pero ningún otro concepto necesita mayor clarificación.»
>
> — David Hilbert.

Por su parte, Arend Heyting se encaró con la aritmética. La aritmética intuicionista comprende los mismos axiomas matemáticos que la aritmética clásica, pero acepta únicamente las leyes lógicas que satisfacen a los intuicionistas. A diferencia de la teoría de conjuntos intuicionista, que sacrificaba gran parte de la teoría de conjuntos clásica, la aritmética intuicionista deparaba una sorpresa: una estrecha relación con la aritmética clásica. Kurt Gödel probó, en 1933, que para cada fórmula demostrable en la aritmética de Peano existe una fórmula equivalente que es demostrable en la aritmética de Heyting, así como recíprocamente. La aritmética intuicionista solo aparentemente era más débil que la aritmética clásica.

Finalmente, Hermann Weyl intentó reconstruir desde postulados intuicionistas el análisis en su obra *El continuo* (1918). Weyl se negaba a admitir conjuntos arbitrarios de naturales, tomando en cuenta únicamente aquellos conjuntos infinitos que eran definibles, construibles. Consiguientemente, solo alcanzó a definir aquellos números reales que corresponden a una ley aritmética.

Es decir, solo reconstruyó una cantidad numerable de los innumerables números que comprende el continuo. Para un matemático clásico, la recta real contiene todas las *posibles* sucesiones de Cauchy o cortaduras de Dedekind, no solo aquellas que son *definibles*, especificables mediante una regla constructiva, y que al ser una cantidad numerable dejan la recta real llena de agujeros, un continuo atomizado. De lo que se desprende que el análisis intuicionista difiere sobremanera del análisis clásico. Los matemáticos intuicionistas no aceptan, por ejemplo, el teorema de Bolzano. Y viceversa: los matemáticos clásicos no aceptan muchos resultados intuicionistas (para los intuicionistas, por ejemplo, no hay funciones discontinuas).

La reconstrucción intuicionista de la lógica y de la matemática no fue muy halagüeña, aunque gozó de mucha repercusión. Más que una reconstrucción fue una demolición. La matemática intuicionista mutiló la matemática clásica. El intuicionismo, con su machacona apelación a la constructibilidad fundada en la enumerabilidad temporal y en el rechazo al *tertium non datur*, arrojó por la borda más de la mitad de los logros clásicos. Con Brouwer, las matemáticas ganaron en claridad, pero los matemáticos contemplaron cómo la mayor parte de sus teorías punteras, que creían sólidas como rocas, se disolvían en humo. Aunque el matemático neerlandés aceptó sin titubear la ruina del análisis, gran parte de la comunidad matemática la halló insufrible. Algunos matemáticos comenzaron a referirse a la «amenaza bolchevique» que Brouwer suponía. Y Hilbert tuvo que tomar cartas en el asunto.

«ALEA IACTA EST»

La polémica formalismo-intuicionismo dominó todo el debate fundacional durante los años veinte, teniendo a Hilbert y Brouwer como sus máximos exponentes. El debate, bien sea por el carácter difícil de Brouwer o bien por la gran influencia de Hilbert, traspasó los ámbitos puramente académicos para convertirse en un







FOTO SUPERIOR:
Fotografía de la celebración del 60.° aniversario de David Hilbert, flanqueado por la esposa de su ya fallecido amigo Minkowski (a su derecha) y su mujer Käthe. Esa era la época en la que se dedicó en cuerpo y alma a la disputa sobre los fundamentos de la matemática contra los intuicionistas.

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
Hilbert en su jardín, acompañado por Hermann Weyl, uno de sus más queridos discípulos, que sin embargo abogó por las ideas intuicionistas.

FOTO INFERIOR DERECHA:
L.E.J. Brouwer, el matemático neerlandés que lideró el movimiento intuicionista basándose en ilustres antecedentes, como fueron Kant, Kronecker y Poincaré. Fue el más acérrimo enemigo científico de Hilbert.

juego de enfrentamientos personales entre sus protagonistas. La confrontación se inició en 1921, con lo que Hilbert consideró una deserción: la de su brillante alumno Hermann Weyl, que publicó en ese año un panfleto titulado «Sobre la nueva crisis de fundamentos en las matemáticas», donde defendía las drásticas tesis de Brouwer y se autoproclamaba apóstol del intuicionismo, profetizando el advenimiento de una revolución matemática.

El debate tocaba puntos importantísimos en la concepción de las matemáticas de Hilbert, pero la ferocidad con que el matemático alemán reaccionó en ocasiones se debió en parte a cuestiones de prestigio personal. Si el más prominente de sus discípulos había cruzado las líneas para unirse al enemigo, ¿por qué no podía hacerlo el resto?

A lo largo de los felices años veinte, coincidiendo con su última etapa investigadora, ya a una edad avanzada, Hilbert se dedicó en cuerpo y alma a la disputa sobre los fundamentos de la matemática. Y lo hizo con una intervención rotunda, que dio un giro realmente novedoso al tema. Propuso un programa, «el programa de Hilbert» (en parte esbozado en su célebre conferencia de París en 1900), para asentar firmemente, y de una vez para siempre, las bases de la matemática.

Para Hilbert, la ciencia era una suerte de organismo que crece y se desarrolla simultáneamente en múltiples direcciones. La clarificación de los fundamentos con ayuda del método axiomático era una de las fases de ese crecimiento y, a pesar de su importancia, no era necesariamente prioritaria. Hilbert utilizaba una metáfora muy a su gusto para describir esta concepción:

> El edificio de la ciencia no se construye como una vivienda, donde se asientan firmemente los cimientos antes de proceder a edificar y agrandar las habitaciones. La ciencia prefiere echar mano lo antes posible de amplios espacios donde poder moverse libremente. Y solo después de esto, cuando aquí y allá surgen las primeras señales de que los endebles cimientos no son capaces de soportar la expansión de las habitaciones, se emprende la tarea de fortificarlos y reafirmarlos. No es esto un signo de debilidad de la ciencia sino todo lo contrario. Es el correcto y sano camino para su desarrollo.

En matemáticas, la hora de examinar los fundamentos había llegado. Desde 1900, pertrechado en la seguridad del método axiomático, que tan bien había funcionado en geometría, Hilbert impulsó el tratamiento axiomático del resto de disciplinas matemáticas, en particular, de la teoría de conjuntos, así como dio los primeros pasos para fundar una teoría matemática de la demostración. Mientras que el platonismo y el logicismo mantenían que la exactitud de la matemática descansaba en un reino celestial, y el intuicionismo en la mente humana, el formalismo hilbertiano la anclaba al papel escrito. La matemática podía verse, desde cierto punto de vista, como un juego de notaciones carente de significado, como una hilera de signos sobre el papel, vacíos de sentido, pero consistentes con ciertas reglas, como las del ajedrez, para manipularlos. La posición formalista que Hilbert y sus colaboradores (Bernays y Ackermann) desarrollaron proponía una solución basada —como explicaremos con detalle en el próximo capítulo— en dos puntos: en primer lugar, una axiomatización conjunta de la matemática y de la lógica; y, en segundo lugar, una prueba de la consistencia de este sistema formal. La prueba de que no se podía deducir ninguna contradicción dentro del sistema era la piedra clave del edificio formalista.

No obstante, había un paso previo ineludible: plantar cara al auge del intuicionismo entre los matemáticos europeos. Tras la Primera Guerra Mundial, las críticas a la matemática clásica planteadas por Brouwer y Weyl arreciaron y motivaron a Hilbert a intentar *eliminar de raíz todas las dudas escépticas*. Hilbert era consciente de que la posición de Brouwer y Weyl no era totalmente infundada y que era necesario, efectivamente, tomar precauciones para no caer en las paradojas de la teoría de conjuntos. Pero, por otro lado, no estaba dispuesto a renunciar a la teoría cantoriana —no en vano el primer problema de la lista de 1900 era el del continuo de Cantor— ni a los logros de la matemática clásica (incluyendo aquí los conseguidos empleando el más atacado de los axiomas, el axioma de elección). Gran parte de sus conquistas como matemático se habían debido a demostraciones de existencia precisamente del tipo al que Brouwer —como antaño Kronecker o Gordan— se oponía frontalmente.

Buscando contrarrestar su influjo, Hilbert se preguntó qué se podía hacer para no renunciar al principio del tercio excluso. A su juicio, quitarle este principio al matemático era lo mismo que prohibirle al astrónomo emplear el telescopio o al boxeador usar sus puños. El catedrático de Gotinga manifestaba su asombro y gran disgusto porque todo un círculo entero de matemáticos hubiera renunciado sin más a él, con las consecuencias tan dramáticas que se desprendían de esta acción para la matemática. El continuo o los números transfinitos de Cantor eran ejemplos de objetos matemáticos condenados. Y el teorema que demuestra que existen infinitos números primos era, por su parte, un ejemplo estrella del modo de razonar prohibido. En efecto, la aceptación de que toda proposición significativa es verdadera o falsa es fundamental para el método de demostración indirecto. Euclides, según explicamos en el primer capítulo, demostró la existencia de infinitos números primos probando que la tesis contraria era falsa, es decir, haciendo uso indispensable del principio del tercio excluso. Como su demostración no era constructiva, no permite determinar el n-ésimo primo, no era válida para los intuicionistas.

Comparada con la matemática clásica, la matemática intuicionista suponía un resto lamentable, una serie de resultados aislados e inconexos. El miedo recurrente de Hilbert era que el intuicionismo consiguiese desmembrar la matemática, corriéndose el riesgo de perder valiosas adquisiciones. Una muestra de lo abatido que se hallaba por el tema es que combatía el intuicionismo incluso argumentando ad hominen, con aires poco académicos:

> El programa de Brouwer no es una revolución sino solamente una repetición con viejos métodos [en referencia a Kronecker] de un golpe de mano inútil que, aun cuando ha sido emprendido con mayor fuerza, ha fallado totalmente. Hoy el Estado está bien armado gracias a los trabajos de Frege, Dedekind y Cantor. Los esfuerzos de Brouwer y Weyl están de antemano condenados al fracaso.

Hacia finales de la década, cuando la pugna entre ambas facciones estaba en su punto álgido, Hilbert se sintió morir a causa de la anemia perniciosa. En ese momento, temió que Brouwer se vol-

viera demasiado influyente a su muerte e inclinara la prestigiosa revista de la que era editor-jefe, *Mathematische Annalen*, hacia el intuicionismo. En consecuencia, en 1928 inició una maniobra poco limpia para expulsar a Brouwer del consejo de redacción. Pese a la oposición de Einstein, la mayoría de los miembros del consejo se plegaron a los deseos de Hilbert, y Brouwer salió por la puerta de atrás. A resultas del enfrentamiento, el matemático neerlandés quedó mentalmente destrozado y se sumió más que nunca en el solipsismo. Einstein calificó el episodio de «guerra entre sapos y ratones». Hilbert había ganado una batalla, pero no la guerra.

CAPÍTULO 5

El fracaso del programa de Hilbert

Hilbert soñaba con fundar las matemáticas sobre una base axiomática. Por desgracia, los teoremas de Gödel acabaron con el sueño del por entonces mejor matemático vivo. En una matemática concebida como un sistema formal siempre habrá hipótesis cuya verdad o falsedad no se pueda demostrar. Y lo que es mucho peor: nunca podrá demostrarse que no puede deducirse una contradicción. Justo cuando el edificio estaba a punto de terminarse, los cimientos volvieron a hundirse.

Hacia finales de la década de los años veinte, el ángel del formalismo y el demonio del intuicionismo aún luchaban por el alma de cada matemático. Pero, por suerte para Hilbert, el formalismo navegaba a toda vela. El cumplimiento del «programa de Hilbert» parecía estar al alcance de la mano. Nadie, ni los matemáticos más reaccionarios, ni los más revolucionarios, expulsaría a los matemáticos de esa suerte de fantasmagórica catedral barroca que era la construcción cantoriana de los infinitos. Nadie les forzaría a dejar de escuchar la sinfonía del infinito que era el análisis clásico.

Después de 1900, el año en el que impartió la renombrada conferencia de París, Hilbert presentó sus puntos de vista sobre la crisis de fundamentos en el III Congreso Internacional de Matemáticos de 1904, celebrado en Heidelberg, pero no volvió sobre el tema durante los siguientes quince años, en los que el análisis y la física le absorbieron por completo. Al final, movido por el deseo de dar respuesta a las críticas intuicionistas, regresó a la cuestión de las bases de la matemática, puntualmente en 1917 y de forma continuada desde 1922. Para Hilbert y la escuela formalista, los objetos del pensamiento matemático son los símbolos mismos; y el problema fundamental, el de la consistencia o no-contradictoriedad de las matemáticas. Para fundamentar definitivamente las matemáticas no necesitaba de Dios, como Kronecker, ni de la suposición de una capacidad especial de nuestro

entendimiento acorde al principio de inducción, como Poincaré, ni de una intuición originaria, como Brouwer, ni tampoco, finalmente, de un axioma de infinitud o de un axioma de reducibilidad, como Russell y Whitehead. La eliminación definitiva del problema de los fundamentos de la matemática como tal sobrevendría tras la prueba de la consistencia del sistema axiomático de las matemáticas.

LOS PUNTOS FUERTES DEL PROGRAMA

No es difícil rastrear los orígenes de las ideas de Hilbert. En 1900 publicó una conferencia, dictada el año anterior ante la asamblea anual de la Sociedad Matemática Alemana, bajo el título «Sobre el concepto de número». Fuera de su libro sobre los fundamentos de la geometría, este trabajo constituyó su segunda publicación concerniente al método axiomático. En ella discutió dos posibles maneras en que los conceptos matemáticos pueden ser tratados: la genética y la axiomática. El ejemplo clásico de aplicación del método genético aparece en la aritmética. Los números naturales emergen de la intuición básica de contar y, con el fin de crear la posibilidad de restar dos números naturales cualesquiera, se amplía el sistema para incluir los números enteros. La necesidad de poder dividir dos números enteros cualesquiera lleva a su vez a introducir los números racionales y, finalmente, para poder calcular raíces, se añaden los números irracionales, definiéndose los números reales. Del otro lado, apostilló Hilbert, tenemos el método axiomático, típicamente usado en la geometría (aunque también en análisis, ya que Hilbert mostró cómo axiomatizar los números reales). A pesar del alto valor pedagógico del método genético, el método axiomático tiene la ventaja de proveer plena seguridad lógica. En este trabajo temprano Hilbert planteó de forma explícita y por vez primera la necesidad de abordar el problema de la consistencia absoluta de la aritmética como problema heredado de la geometría (cuya consistencia relativa él mismo había demostrado). Esta cuestión encontraría su hueco dentro de la lis-

ta de veintitrés problemas abiertos de 1900, copando el segundo puesto (solo por detrás de la hipótesis del continuo), y Hilbert regresaría a ella en el congreso de 1904, aunque subestimando la dificultad de la empresa. No se trataba de buscar modelos más básicos en los que apoyarse para deducir la consistencia de la aritmética, a la manera que se había hecho con los axiomas de la geometría, ya que con esto solo se probaría la consistencia relativa. Había que elaborar una demostración de la consistencia absoluta, basándose en la sintaxis y no en la semántica, es decir, estudiando si un sistema formal que expresara la aritmética permitía o no derivar contradicciones.

No obstante, no fue hasta la difusión de las paradojas, en torno a 1904, cuando Hilbert se convenció de dedicar mayores esfuerzos al análisis axiomático como parte de la tarea más amplia de establecer la consistencia de la aritmética (ya que, como vimos, tanto la geometría como el análisis se habían reducido a ella). Según acostumbraba, Hilbert escogió a un colaborador, en este caso Zermelo, como la persona sobre la que recaería la misión de desarrollar la axiomatización de la teoría de conjuntos en detalle. Fue de esta manera como los dos puntos fundamentales del programa hilbertiano comenzaron a perfilarse. Primero, la axiomatización. Después, la consistencia.

Era necesario, como primera etapa, formalizar la teoría de conjuntos, pero también la lógica y la aritmética. Las definiciones ingenuas no permitían un razonamiento riguroso exento de paradojas. Había que formalizar completamente las matemáticas conocidas, traduciendo todo su contenido dentro de un sistema formal expresado mediante el nuevo lenguaje simbólico: 0 (el número cero), s (la función sucesor), $\neg$ (no), $\vee$ (o), $\wedge$ (y), $\rightarrow$ (implicación), $\exists$ (cuantificador existencial), $\forall$ (cuantificador universal), $=$ (igualdad), x (variable), etc. Exactamente en 1928, cincuenta años después de la aportación pionera de Frege, Hilbert y Ackermann publicaron *Fundamentos de lógica teórica*, el primer libro de texto de lo que actualmente se reconoce como lógica de primer orden. Su formalización alcanzó el rango de canónica y hoy es universalmente conocida como sistema de Hilbert-Ackermann. Establecieron la sintaxis formal, así como proporcionaron los axiomas

y las reglas de inferencia de esta lógica, lo que permite deducir nuevas fórmulas. La lógica de primer orden se convirtió en un verdadero cálculo.

«En el principio fue el signo.»

— David Hilbert, *La nueva fundamentación de las matemáticas* (1922).

En el manual Hilbert y Ackermann se plantearon ciertas preguntas metalógicas sobre las propiedades del cálculo que habían desarrollado. Se hacían eco, en particular, de la prueba que Bernays había ofrecido en 1926 de que la lógica elemental o lógica de proposiciones era correcta (toda fórmula demostrable era verdadera) y completa (toda verdad lógica era, a su vez, demostrable), un resultado al que había llegado independientemente Emil Post (1897-1954) en 1922. Y se planteaban si la lógica de primer orden lo era, aunque reconocían no haber encontrado la respuesta. Justo un año después, en 1929, un joven lógico austriaco llamado Kurt Gödel demostró la completitud de la lógica de primer orden dentro de su tesis doctoral, dirigida por Hans Hahn (1879-1934), aunque no publicada hasta 1930. Esta lógica era correcta (todas las fórmulas demostrables son verdaderas) y completa (todas las verdades lógicas, todas las tautologías, son demostrables). En el cálculo de predicados de primer orden la noción sintáctica de deducción y la noción semántica de verdad coinciden, tienen la misma extensión.

El programa de Hilbert obtenía un éxito inesperado y esperanzador: toda fórmula lógicamente válida, en el sentido de verdadera en cualquier interpretación posible, era deducible mediante el cálculo descrito. Ahora bien, ¿qué pasaba si a este cálculo de predicados puro se le añadían axiomas y reglas que hicieran referencia a la aritmética o a la teoría de conjuntos? ¿Seguía siendo correcto y consistente? ¿Y completo?

Como segunda etapa, había que convertir el concepto mismo de demostración en un objeto de estudio matemático para, por medio de ello, probar la consistencia de la aritmética y, de este modo, erradicar todas las incertidumbres. En matemáticas no

debían tener cabida las verdades a medias. Para Hilbert, el matemático se ocupaba del concepto de prueba matemática de la misma manera que el físico repasaba el funcionamiento de sus aparatos o el filósofo criticaba la propia razón. El desarrollo de una «teoría de la demostración» permitiría considerar las demostraciones como resultado de meras combinaciones de símbolos según reglas formales prescritas. En estas condiciones, bastaría demostrar que ninguna derivación formal, ninguna combinación de símbolos podía conducir a la fórmula $0 \neq 0$ (que es una contradicción). Con ello quedaría establecida la consistencia de la aritmética. En efecto, bastaba probar que había una fórmula que no podía demostrarse, ya que si todas las fórmulas pudiesen demostrarse podríamos deducir una contradicción (probando una proposición y su contraria), con lo que el sistema sería inconsistente. Recíprocamente, si el sistema fuese inconsistente, como de una contradicción se sigue cualquier cosa (*ex contradictione sequitur quodlibet*, según acuñaron con acierto los escolásticos), podríamos demostrar cualquier fórmula (la fórmula «si $0 \neq 0$, entonces *P*» es siempre verdadera, válida, porque el antecedente nunca es el caso).

A lo largo de los años veinte, Hilbert introdujo la idea de que su «teoría de la demostración» abordaría la cuestión de la consistencia mediante dos niveles de consideración. Por un lado, el nivel matemático, tal y como queda representado dentro del sistema formal. Por otro lado, el nivel *metamatemático*, un nivel de discurso en el que se habla de las matemáticas axiomatizadas. En este nivel se procedería a probar la consistencia mediante una serie de técnicas que estudiarían el sistema formal desde fuera, desconectándolo de cualquier significado numérico o relacionado con el infinito, simplemente como cadenas finitas de signos primitivos a partir de las cuales se pueden generar fórmulas y demostraciones de acuerdo a ciertas reglas predefinidas. Las proposiciones que se refieren a este esqueleto formal, a esta aritmética vaciada de significado, son las proposiciones metamatemáticas, que no se formulan en el lenguaje objeto sino en el metalenguaje. Es algo así como el español cuando se usa en una clase de inglés para enseñar los matices de uso de alguna palabra anglosajona. La pregunta por la

consistencia en matemáticas o, equivalentemente, la pregunta de si la fórmula $0 \neq 0$ es demostrable era, en suma, como preguntar si una determinada posición de ajedrez es legal, es decir, si es posible llegar a ella partiendo de la situación inicial de la partida y de las reglas del movimiento de piezas. Para responder, uno no juega al ajedrez sino que reflexiona sobre el propio ajedrez.

«Duda de los datos hasta que los datos no dejen lugar a dudas.»

— Henri Poincaré.

Pero Hilbert insistía en que la demostración metamatemática de la consistencia de la aritmética tenía que satisfacer tanto a los matemáticos clásicos como a los intuicionistas, es decir, debía hacerse mediante métodos finitarios, constructivos, que no requiriesen la intervención del infinito. En efecto, como subrayó Poincaré poco antes de morir, si para probar la consistencia de la aritmética se usaba el principio de inducción, es decir, el quinto axioma de Peano, aunque fuera en el plano metamatemático, se caía en un círculo vicioso: se quería demostrar la coherencia de la aritmética empleando precisamente un principio aritmético. Se trataba de demostrar con razonamientos autoevidentes que los propios métodos matemáticos, aun cuando implican la presencia del infinito actual, son válidos, es decir, que no dan lugar a deducir una contradicción. Aún más: Hilbert aspiraba a demostrar no solo la consistencia de la matemática, sino también su completitud. Esta era la otra cuestión pendiente en la base de su conferencia del año 1900: la posibilidad de resolución de cualquier cuestión matemática.

Hilbert y sus colaboradores lograron demostrar la consistencia de algunos sistemas formales sencillos. Así, en 1922, Hilbert se fijó en una parte muy elemental de la aritmética y, estudiando el aspecto de las fórmulas demostrables, concluyó que la fórmula $0 \neq 0$ no era una de ellas. Esta prueba fue posteriormente extendida por Ackermann en su tesis doctoral (fechada en 1925 y realizada bajo la supervisión de Hilbert), así como simplificada con elegancia por Von Neumann en 1927. Pero se trataba de avances

parciales: los sistemas formales aritméticos de los que probaban la consistencia no incluían el principio de inducción. En 1929, el matemático polaco Mojzesz Presburger (1904-1943) logró demostrar la consistencia de una aritmética que incluía el principio de inducción y la suma, pero no la multiplicación. Estos resultados cristalizarían en dos volúmenes escritos por Bernays en nombre de Hilbert bajo el título *Fundamentos de las matemáticas*, que se publicarían en 1934 y 1939. Sin embargo, la consistencia de los sistemas que describían una porción lo suficientemente grande de la aritmética con números naturales seguía resistiéndose.

GÖDEL: DESASTRES Y TEMPESTADES

Hacia 1930, el primer punto del programa de Hilbert se había esencialmente cumplido: la lógica, la teoría de conjuntos y la aritmética estaban axiomatizadas. Quedaba todavía pendiente el asunto de la consistencia y de la completitud de estas dos últimas.

Ese año Hilbert se jubiló tras cumplir sesenta y ocho años. Con motivo del nombramiento como ciudadano honorífico de Königsberg, el catedrático emérito de Gotinga pronunció un discurso en su ciudad natal. En él, volvió a defender la idea de que no hay problemas irresolubles en matemáticas. Al terminar, se dirigió a la radio local, donde declamó con igual intensidad la frase final de su discurso: «Debemos saber, sabremos». Después, sonrió. Todavía se conserva la grabación y, si se escucha muy cuidadosamente, puede oírse la risa final de Hilbert. Era el 8 de septiembre de 1930.

Paradójicamente, como si se tratase de una broma del destino, durante los tres días previos se había celebrado precisamente en Königsberg un congreso sobre epistemología de las ciencias exactas. La meta del encuentro era decidir hasta qué punto se había solventado la crisis de fundamentos de las matemáticas. Intervinieron conferenciantes dentro de cada una de las corrientes fundacionales. Por el logicismo, el lógico Rudolf Carnap (1891-1970), que expuso la concepción de las matemáticas que había hecho suya el Círculo de Viena: los teoremas matemáticos como

tautologías, verdades lógicas. Por el intuicionismo, Arend Heyting, pretendiendo expulsar el infinito de las matemáticas. Y, por el formalismo, John von Neumann, que estaba a la zaga de Hilbert. El día 6, el joven lógico austriaco Kurt Gödel, de veinticuatro años, había intervenido para comunicar un par de resultados que recientemente había obtenido: «Puedo dar ejemplos de proposiciones aritméticas verdaderas pero indemostrables en el sistema formal de las matemáticas clásicas». A pesar de su importancia, el anuncio pasó desapercibido para todos los asistentes, a excepción de Von Neumann, que quedó perplejo. Pese a soñar reiteradamente que lograba demostrar la consistencia de la matemática mediante métodos finitarios, Von Neumann había comenzado a sospechar que no era realmente posible y la breve comunicación de ese joven tímido de gafas circulares pronto se le apareció como un hito que siempre se divisaría desde remotas distancias en el espacio y en el tiempo. Era la sentencia de muerte de la hermosa frase final de Hilbert. La esperanza que el matemático alemán había mantenido viva durante más de treinta años iba a apagarse definitivamente. Las matemáticas no volverían a ser seguras. Con la publicación en 1931 de los teoremas de incompletitud de Gödel, el programa de Hilbert fue cortocircuitado. Pero para explicar por qué, necesitamos unas gotas de lógica matemática.

Desde Aristóteles, sin olvidar las aportaciones escolásticas, la lógica ha sido concebida como el estudio del razonamiento, que nunca se da en el vacío sino siempre dentro de un lenguaje. Con el paso del tiempo, los matemáticos fueron prestando mayor atención a la lógica de los lenguajes en que se expresan, con el fin de determinar sus virtualidades. La lógica les enseñó que hay dos nociones fundamentales a estudiar en un lenguaje: una de carácter semántico, la noción de verdad; otra de carácter sintáctico, la noción de demostración. Así, la dificultad estribaba en determinar su alcance respectivo: si estas dos nociones, muy distintas intensionalmente, coinciden extensionalmente. Con otras palabras, si todo lo demostrable es verdad *(corrección)* y si todo lo verdadero es demostrable *(completitud)*. Generalmente, a un lenguaje rico en capacidad de expresión, corresponde una lógica pobre en propiedades interesantes. Por ejemplo, la lógica

de los lenguajes de primer orden es correcta y completa, pero al matemático suele quedársele corta en su faena de cada día (cuando precisa cuantificar sobre propiedades y no solo sobre individuos). Pero no cabe esperar que la lógica de los lenguajes de segundo orden o superior sea completa. Así que una de dos: o bien hacemos matemáticas en un lenguaje poco expresivo pero cuya lógica es correcta y completa; o bien formalizamos nuestros razonamientos matemáticos en un lenguaje expresivo pero cuya lógica subyacente es, en el mejor de los casos, correcta (solo podemos demostrar verdades) pero incompleta (no podemos demostrar todas las verdades).

«Gödel es el lógico más grande de todos, después de Aristóteles.»

— John von Neumann sobre Gödel.

Restringiéndonos al lenguaje de primer orden (donde solo se puede cuantificar sobre individuos), si interpretamos los individuos como números, difícilmente iremos más allá de una aritmética elemental (por ejemplo, el teorema que afirma que *todo* conjunto de números naturales posee un elemento mínimo es inexpresable, ya que tendríamos que cuantificar sobre conjuntos de números), y jamás nos elevaremos hasta el análisis. El problema reside en que las funciones o las relaciones numéricas no son, a su vez, números. Sin embargo, esta dificultad se esfuma si consideramos conjuntos, porque las funciones y las relaciones entre conjuntos son, a su vez, otros conjuntos: las n-tuplas de conjuntos son conjuntos. Esto plantea la importante cuestión de si toda la matemática es reducible a teoría de conjuntos. Si interpretamos los individuos de nuestro lenguaje de primer orden como conjuntos, se comprueba empíricamente cómo la mayoría de entes matemáticos son definibles a partir de conjuntos. Este programa de investigación sedimentó en la mencionada teoría de conjuntos *ZF*: partiendo de unos pocos axiomas formulables en primer orden, esta teoría de conjuntos fue capaz de tragarse una parte ingente de la matemática de su tiempo.

De nuevo, como al cabo comprendió Gödel, el precio que hay que pagar por esta riqueza teórica (expresividad) es la pobreza metateórica, que se manifiesta en varios resultados de limitación: los teoremas de incompletitud. El primer teorema prueba que existe una fórmula verdadera que no es demostrable en *ZF* (aunque el trabajo de Gödel tomaba los *Principia mathematica* como sistema formal de referencia, sus resultados son válidos para *ZF* y otros sistemas afines). Y el segundo, que es imposible demostrar la consistencia de *ZF* en *ZF*. Más aún: una demostración en *ZF* de la ausencia de contradicción en *ZF* y, por ende, en las matemáticas, únicamente demostraría que *ZF* y las matemáticas son, de hecho, contradictorias. Gödel acabó con las esperanzas del formalismo hilbertiano. Todos los esfuerzos por probar la consistencia de la matemática están condenados al fracaso. Con más precisión: es imposible demostrar mediante métodos finitarios la ausencia de contradicciones de cualquier sistema formal que contenga la aritmética de Peano —si se permite el empleo de artillería pesada, sí es posible probar la consistencia, como lo logró Gerhard Gentzen (1909-1945), un alumno de Hilbert, en 1936, aunque mediante métodos transfinitos cuya evidencia es muy discutible—.

«¿Quién de nosotros no se alegraría si pudiera levantar el velo tras el que se oculta el porvenir, dejando caer su mirada sobre los futuros avances de nuestra ciencia y los secretos de su desarrollo?»

— David Hilbert, introducción de su intervención en el II Congreso Internacional de Matemáticos en París.

La paradoja del mentiroso fue para Gödel uno de los motores de la demostración de los teoremas de incompletitud. El que la prueba esté a un paso de caer en la circularidad provocó que más de un matemático —caso del sexagenario Zermelo— no comprendiese su valor. Gödel ideó una hábil traducción del metalenguaje dentro del lenguaje: una aritmetización de la metamatemática. Mediante una audaz codificación numérica basada

en los números primos (llamada *gödelización* desde entonces), asignó números a los signos, de manera que fuera factible asociar a cada fórmula —y también a cada demostración— un número que codificara toda su estructura. Las proposiciones que hablaban de las propiedades del sistema formal eran a su vez expresables dentro del sistema por medio de fórmulas aritméticas. La demostrabilidad, por ejemplo, quedaba representada como una relación numérica.

En estas condiciones, Gödel se las ingenió para construir una fórmula G que afirma de sí misma lo siguiente: «soy indemostrable». Esta fórmula era un ejemplo de sentencia *indecidible* dentro del sistema formal: ni ella ni su negación son teoremas, es decir, demostrables. En efecto, Gödel consiguió demostrar que G es demostrable si y solo si $\neg G$ es demostrable. Por lo que, si deseamos que el sistema formal sea consistente, ni G ni $\neg G$ pueden serlo. Si G lo fuese, como $\neg G$ afirma en términos metamatemáticos que G es demostrable (niega que sea indemostrable como ella misma afirma), sería posible demostrar también $\neg G$ y deducir una contradicción ($G \wedge \neg G$). Recíprocamente, si $\neg G$ fuese demostrable, podríamos por la misma razón demostrar G y llegar a la misma contradicción. En suma, la demostración de cualquiera de las dos fórmulas implicaría ipso facto la inconsistencia del sistema. Pero hay más: si asumimos que el sistema formal es consistente, entonces G es indemostrable pero verdadera. Si G fuera falsa, como lo que dice G es «no soy demostrable», entonces G sería demostrable, lo que es imposible. En consecuencia, tenemos una sentencia G que, aunque no demostrable, es verdadera.

La existencia de una sentencia indecidible implica que los axiomas de la teoría no contienen la respuesta a todas las preguntas formulables en el lenguaje formal, porque ni la sentencia ni su negación son teoremas. Y como ella o su negación han de ser verdaderas, tenemos una fórmula verdadera indemostrable. Lo peor es que si uno añade la sentencia indecidible como axioma, aparecen otras nuevas. Los matemáticos despertaron de golpe del sueño hilbertiano de la completitud, en que los sistemas axiomáticos no contienen fórmulas indecidibles y lo verdadero coincide siempre con lo demostrable. Resumiendo: «consistente» implica

«incompleto»; y, recíprocamente, «completo» implica «inconsistente». Ningún sistema formal que contenga la aritmética usual es simultáneamente ambas cosas. Si suponemos que es consistente, siempre será incompleto, es decir, contendrá verdades no demostrables. Existirán algunas propiedades ciertas sobre los números formalmente indecidibles, es decir, que no podremos demostrar ni refutar a partir de los axiomas.

Pero al primer teorema de incompletitud le sigue un segundo teorema: como, según vimos, la consistencia es equivalente a afirmar que la fórmula $0 \neq 0$ no es demostrable, Gödel transformó esta última propiedad metamatemática en una fórmula aritmética, que llamaremos C, y observó que lo que el primer teorema establece es, en el fondo, «$C \rightarrow G$». La consistencia implica que existe una sentencia indecidible y, por tanto, la incompletitud. De modo que una prueba de C permitiría descargar G en la implicación «$C \rightarrow G$» mediante el *modus ponens* y, por tanto, demostrar G, lo que es imposible, ya que G es por construcción indemostrable. Por consiguiente, C es también indemostrable. Este corolario sorprendente asegura que la consistencia de un sistema formal que incluya la aritmética no es demostrable dentro del sistema formal. En realidad, Gödel no demostró propiamente este segundo teorema, solo argumentó a favor de su plausibilidad, sin llegar nunca a escribir la demostración prometida. La primera prueba completa, muy laboriosa, apareció curiosamente en 1939, en el segundo volumen de los *Fundamentos de las matemáticas* de Bernays y Hilbert.

Para rizar el rizo, a las limitaciones *sintácticas* que descubriera Gödel, se unió otra limitación *semántica* de los sistemas formales de primer orden: el teorema formulado por Leopold Löwenheim (1878-1957) y Thoralf Skolem (1887-1963) hacia 1920, sobre el que este último volvió en 1933. En 1930, dentro de su prueba de la completitud de la lógica de primer orden, Gödel demostró de pasada que toda teoría de primer orden consistente tiene un modelo en el que los axiomas se verifican, aunque nada dijo sobre qué características tiene ese modelo o cómo construirlo. Lo que Löwenheim y Skolem percibieron con anterioridad es que cualquier sistema formal de primer orden consistente tiene, de hecho, un modelo numerable. Esto da lugar a la paradoja de

EL TEOREMA DE INDEFINIBILIDAD DE LA VERDAD DE TARSKI



Alfred Tarski en 1968.

Alfred Tarski (1902-1983) se preciaba de ser el mejor de los lógicos matemáticos vivos y cuerdos (con lo que evitaba compararse con el maniático y obsesivo Gödel). Este lógico polaco, que logró embarcarse para Estados Unidos en 1939 y convertir la Universidad de Berkeley en la capital mundial de la lógica matemática durante decenios, era noctámbulo y aficionado a las anfetaminas, a fin de mantenerse despierto trabajando incansablemente. Hizo suyo el aforismo hilbertiano de que el mejor descanso de un matemático se encuentra en la esposa de un colega, una reputación de Casanova a la que tampoco fueron indiferentes sus doctorandas (en algún momento, amante y esposa llegaron a convivir bajo el mismo techo): una de ellas, que logró resistirse, fue la matemática estadounidense Julia Robinson. Tarski es célebre porque en 1933 publicó un extenso artículo en el que daba una definición formal de verdad, inaugurando con ello la teoría de modelos. Si Hilbert, con su teoría de la prueba o de la demostración, esclareció la noción sintáctica de demostración formal, Tarski hizo lo propio con la noción semántica de verdad.

Otro teorema de limitación

En 1933, dos años después de que Gödel diera a conocer sus dos resultados de incompletitud, Tarski extrajo otro teorema de limitación, aunque este teorema ya fue enunciado y probado por Gödel en una carta a Zermelo fechada en 1931. Expresado en términos de límite expresivo, este teorema establece que toda teoría formal de primer orden que contenga la aritmética básica es incapaz, si es consistente, de expresar su propio concepto de verdad. Las teorías interesantes no contradictorias no pueden contener una expresión «ser verdad» dentro de su lenguaje, porque de ser así caerían en la paradoja del mentiroso. Usando la *gödelización*, podría reproducirse una fórmula T que afirmara de sí misma que es falsa. A continuación, se compondría con la expresión «ser verdad» que presuponemos que existe dentro del lenguaje, y llegaríamos a la siguiente contradicción: T es verdad si y solo si es falsa, puesto que es lo que T afirma. Como el mentiroso: digo la verdad si miento. Desde luego, los lógicos matemáticos han sido capaces de emplear la circularidad que precipita en las paradojas con gran provecho.

Skolem: si ZF es consistente, posee entonces un modelo numerable. Es decir, ¡el continuo no-numerable que creemos manejar dentro de ZF puede referir a un conjunto numerable fuera de ZF! La teoría de los números reales, de la que esperamos y queremos que tengan el familiar modelo no numerable (los números reales «reales»), tiene también un modelo numerable. Esto quiere decir que las teorías de primer orden no pueden controlar la cardinalidad de sus modelos. Así, por ejemplo, si los axiomas de Peano de la aritmética se formulan en la lógica (incompleta) de segundo orden, son *categóricos* (es decir, todos sus posibles modelos son isomorfos, tienen el mismo cardinal); pero si los formulamos en

EL «ENTSCHEIDUNGSPROBLEM» O PROBLEMA DE LA DECISIÓN

En el IV Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en Bolonia en 1928, Hilbert aprovechó la ocasión para —aparte de contar de nuevo su plan de salvación de la matemática— plantear la siguiente cuestión: ¿existe un procedimiento mecánico que resuelva todos y cada uno de los problemas de la matemática, un algoritmo capaz de *decidir* en principio todas las cuestiones matemáticas, que dada una proposición matemática nos diga si es o no un teorema? ¿Es, en otras palabras, *decidible* la matemática? Al igual que las cuestiones de la consistencia y de la completitud, recibiría una respuesta negativa. Tras los teoremas de Gödel, se entrevió que la respuesta al problema era un no rotundo al ser incompleta la matemática: el supuesto algoritmo se quedaría tiempo infinito pensando en la sentencia indecidible, ya que ni ella ni su negación son un teorema. En consecuencia, el *problema de la decisión* solo quedó pendiente para la lógica de primer orden, que es, recordemos, completa. Sin embargo, en 1936, Alan Turing (1912-1954) e independientemente Alonzo Church (1903-1995) demostraron que la lógica de primer orden tampoco es decidible.

La tesis de Church-Turing

Turing comenzó por plantearse qué quería decir pensar como una máquina, mecánicamente. Su primer triunfo consistió en definir el concepto de función computable: una función computable es aquella que una *máquina de Turing*, una suerte de computadora sin limitaciones de espacio o tiempo, es capaz de calcular. Simultáneamente, al otro lado del Atlántico, Church llegó a idénticas conclusiones mediante el desarrollo de un sistema formal que llamó *cálculo lambda*. Desde entonces, se conoce como tesis de Church-Turing el

la lógica (completa) de primer orden, pagamos el precio de perder la *categoricidad*. Habrá modelos estándar y no estándar de los números naturales. La avaricia del lógico tiene un coste.

Además, Gödel conjeturó muy pronto que la hipótesis del continuo de Cantor, que en 1925 Hilbert creía estar cerca de probar empleando técnicas muy refinadas entresacadas de su teoría de la demostración, era un ejemplo de sentencia *indecidible* en la teoría de conjuntos habitual. En 1938, restringiéndose al subuniverso de los conjuntos *constructibles*, Gödel probó que no puede demostrarse que sea falsa en *ZFC*. Inversamente, en 1963, Paul Cohen (1934-2007) probó, empleando el método del *forcing*, que

postulado que afirma que cualquier definición alternativa de computabilidad es equivalente a la definición dada por Turing en términos de sus máquinas. Recurriendo a una variante ingeniosa del argumento diagonal de Cantor, Turing probó que hay muchas más funciones que máquinas de Turing. O, expresado de otro modo, que hay funciones no computables. Las funciones computables, como las máquinas de Turing, son una cantidad numerable, esto es, agujas en el pajar de todas las funciones. Finalmente, considerando el *problema de la parada*, ofreció una respuesta negativa a la pregunta de Hilbert, al *Entscheidungsproblem*: si existiera ese procedimiento, también sería capaz de decidir en tiempo finito si una máquina de Turing cualquiera se para tras un número finito de pasos o entra en un bucle infinito cuando se le introduce cierto dato como entrada. Pero esto último era, según demostró, imposible. No existe un algoritmo capaz de recibir como *input* un enunciado lógico o matemático y devolver como *output* «teorema» o «no-teorema» (aunque la propiedad de deducibilidad sí es decidible en la restringida lógica de proposiciones).



Estatua en pizarra y retrato de Alan Turing en el Museo de Bletchley Park.

tampoco puede demostrarse que sea verdadera en *ZFC*. Gödel y Cohen construyeron sendos modelos donde la hipótesis era, respectivamente, verdadera y falsa. Así que ni la afirmación ni la negación de la hipótesis del continuo son demostrables. Exactamente lo mismo ocurre con el axioma de elección, cuya consistencia e independencia con respecto al resto de axiomas también probaron ambos matemáticos. El estatus del axioma de elección y de la hipótesis del continuo dentro de la teoría de conjuntos es, por tanto, análogo al del axioma de paralelas en geometría. El de Cantor no es el único paraíso conjuntista disponible.

El programa de Hilbert quedó fuera de combate por culpa de los derechazos infligidos por Gödel. Tanto el primer como el segundo problema de la famosa lista de veintitrés problemas de Hilbert quedaron al fin resueltos, aunque de una manera inimaginable en 1900. En matemáticas, lo verdadero no coincide con lo demostrable. Los axiomas y las reglas de inferencia que Hilbert había puesto en cabeza no eran suficientes, no bastaban para deducir todos los teoremas matemáticos, siendo posible imaginar proposiciones verdaderas pero no derivables en el sistema formal de las matemáticas clásicas. De hecho, «la aritmética es consistente» era un ejemplo de este tipo de proposiciones indecidibles. Hilbert, que conoció a los pocos días los teoremas de Gödel (gracias a Bernays), intentó salvar parte de su programa permitiendo el uso de métodos no finitarios para demostrar la consistencia de la matemática. Pero, como ya dijimos, estos métodos son cualquier cosa menos autoevidentes. Hilbert y sus pastores matemáticos habían construido un recinto para proteger de los lobos al rebaño, pero desconocían si habían dejado algún lobo dentro.

BALANCE: LAS GRIETAS DEL FORMALISMO

Pese a que las dudas escépticas nunca fueron exorcizadas del todo, la matemática clásica siguió gozando de la mejor salud. La firmeza y el entusiasmo de Hilbert lograron mantener el rumbo del gran barco de las matemáticas. El formalismo, en cuanto fun-

damentación de la matemática, besó la lona; pero, en cuanto filosofía de las matemáticas, ganó a los puntos.

Frecuentemente se dice que la posición platónica es la que mejor caracteriza la actitud del matemático hacia la esencia de su disciplina. El matemático en activo cree en la realidad de los objetos matemáticos. Pero claro, cuando los filósofos empiezan a acosarle con sus preguntas, corre a esconderse bajo las faldas del formalismo y afirma: «la matemática no es más que una combinación de signos faltos de significado, un bonito juego con fórmulas, más divertido aún que el ajedrez». Aunque con ello la relación que tiene con la realidad, con su significado real, quede entre tinieblas. Si se quiere certeza, hay que eliminar todo significado; pero si se quiere que las matemáticas tengan sentido, se ha de abandonar la certeza. Para el formalista estricto, toda teoría matemática no es sino una combinación de signos sin significado, como un jeroglífico desprovisto de ulterior sentido. En verdad, la mayoría de matemáticos son platónicos los días laborables, mientras faenan entre teoremas, proposiciones y corolarios, y solo se vuelven formalistas los fines de semana, cuando abandonan sus trabajos y charlan con los filósofos.

Si bien es cierto que Hilbert fue un formalista circunscrito al campo de los fundamentos de las matemáticas, no puede decirse sin ambigüedad que lo fuese en su concepción general de la matemática. Para el matemático alemán la matemática no tenía nada que ver con la arbitrariedad de un juego. Se trataba más bien de un sistema conceptual cerrado, dotado de una necesidad interna, donde se cumplía que a nuevas ideas correspondían siempre nuevos signos y manipulaciones.

A lo largo de los dos últimos capítulos hemos comprobado cómo cada una de las concepciones de la matemática (platonismo, logicismo, intuicionismo, formalismo) presenta dos caras: por un lado, un plan de fundamentación de las matemáticas (la conjuntivización del platonismo, la logificación del logicismo, el constructivismo del intuicionismo, el axiomatismo del formalismo); por otro lado, una visión de la matemática (el realismo platónico y logicista, el conceptualismo intuicionista, el nominalismo formalista). A la postre, el formalismo demostró ser la corriente

más fuerte, aunque en su persecución de una matemática segura, entendida como ciencia de los sistemas formales, se dio de bruces con los teoremas de Gödel. Ahora bien, el error que comete esta corriente, al igual que las otras, es presuponer que las ciencias se fundan sobre sus propias fundamentaciones.

Durante la *crisis de fundamentos* no hubo ninguna amenaza de derrumbe del edificio secular de las matemáticas. Es un mito bastante extendido pensar que las soluciones lógico-formales apuntalaron un presunto edificio en ruinas. Porque en realidad la matemática siguió su curso sin apercibirse de esas supuestas grietas. No en vano se estaba viviendo una edad dorada, con espléndidos y fértiles avances (teoría de la medida, análisis funcional, topología...). La mal llamada *crisis de fundamentos*, que solo se dibujó en el terreno de la lógica y la teoría de conjuntos, fue mucho más una *crisis de métodos*, que renovó la forma de hacer matemáticas.

Hilbert fue el campeón de la axiomática, un firme partidario del método axiomático no solo para la matemática sino para la ciencia. Bajo su patronazgo se expandió desde las raíces a todas las ramas del árbol matemático. Pero, dejando de lado la brecha abierta por Gödel, hay que decir que el axiomatismo hilbertiano no encaja con el quehacer cotidiano del matemático, con su día a día.

Si observamos a un matemático en acción, porque los artículos no son más que los productos acabados de ese hacer, nos asombraremos de la gran cantidad de razonamientos *no* formales que hace. ¿Qué demuestran los teoremas de limitación de Gödel o Tarski para el matemático en activo? Que la matemática es un conejo demasiado grande para sacarlo de una chistera tan pequeña como es un sistema axiomático, por hábil que sea ese prestidigitador llamado Hilbert. Es más, como patentiza la historia de los números, la axiomática solo es posible si previamente ha habido una fase de manejo operacional del modelo, es decir, solo se pueden listar los axiomas de los números si ya se posee una ligera idea del constructo que se tiene entre manos. El método genético precede al método axiomático, y permutarlos ofrece la misma ventaja que el robo sobre el trabajo honrado (la axiomática se arroga

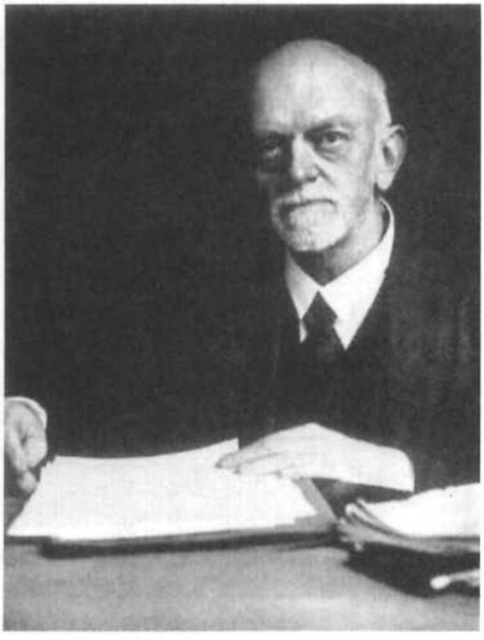


FOTO SUPERIOR:
Fotografía de la tumba de Hilbert en Gotinga. Al pie de la lápida puede leerse la célebre frase que pronunció en el discurso tras ser nombrado ciudadano honorífico de Königsberg: «Debemos saber, sabremos».

FOTO INFERIOR IZQUIERDA:
Alfred Tarski y Kurt Gödel en Viena, en 1935. Ambos propiciaron el derrumbe del edificio hilbertiano con sus teoremas de limitación.

FOTO INFERIOR DERECHA:
David Hilbert a finales de la década de 1930.





BOURBAKI

La concepción ultraformalista de las matemáticas repuntó durante los años de posguerra de la Segunda Guerra Mundial con el bourbakismo. Este grupo de jóvenes matemáticos franceses (André Weil, Henri Cartan y Jean Dieudonné, entre otros), surgido en 1935, se bautizó con el nombre del fracasado general francés Bourbaki porque, cursando sus estudios, un jocoso estudiante más avanzado les propuso teoremas formulados erróneamente con nombres de famosos generales. El colectivo Bourbaki actuó como firmante de múltiples memorias y monografías, y se presentó a sí mismo como el verdadero heredero intelectual de Hilbert. Con la consigna de «¡abajo Euclides!», Bourbaki presentaba las matemáticas de un modo muy abstracto y aséptico, que cristalizó en unos *Elementos de matemática* altamente axiomatizados. Esta tendencia a presentar las matemáticas como serafines, purificados de toda incertidumbre terrena, fue la responsable de la enseñanza de la teoría abstracta de los conjuntos desde la más tierna infancia en las escuelas de media Europa durante los años setenta y ochenta del siglo pasado.



El congreso Bourbaki de 1938 (de izquierda a derecha): S. Weil, C. Pisot, A. Weil, J. Dieudonné, C. Chabauty, C. Ehresmann y J. Delsarte.

de inmediato todo lo construido). Incluso los axiomas lógicos y los de la teoría de conjuntos se han obtenido como resultado del análisis de las demostraciones no formales. Además, cuando el matemático corriente razona sobre el continuo de números reales, jamás piensa en modelos no estándar (numerables) del continuo (que existen si se trabaja axiomáticamente dentro de *ZFC* y que, para un irredento formalista, son tan válidos como el modelo estándar). Desde el punto de vista del analista o del topólogo, para el cual el continuo es una realidad operacional, la existencia de modelos numerables significa simplemente pobreza del lenguaje formal como medio de imitación de los razonamientos no formales. Pese a la luminosidad de la metáfora acuñada por Hilbert, la matemática no es un edificio, un templo, sino que se asemeja más a una ciudad, con sus avenidas, sus barrios, sus zonas nuevas en construcción y sus zonas deshabitadas, cerradas por derribo.

LA CAÍDA DE LOS DIOSES

Con la llegada de Hitler al poder en el año 1933, Ludwig Bieberbach —afiliado al Partido Nazi— se aupó a la cabeza de las matemáticas alemanas, promoviendo una matemática «aria o alemana» (la *Deustche Mathematik*). La teoría de la relatividad fue denunciada como un fraude judío. El mismo destino corrió la teoría de conjuntos, quizá a causa de que empleara el alfabeto hebreo para los cardinales transfinitos (aunque aquí también pesó que Bieberbach fuera el aliado de Brouwer en Berlín). A los profesores judíos se les prohibió impartir clases y, uno tras otro, fueron relevados de sus cargos.

El Instituto Matemático de Gotinga fue rápidamente desmantelado y su prestigio internacional se hundió para gran pena de Hilbert. Hermann Weyl, su alumno predilecto y quien finalmente había sido elegido para sucederle, aunque era ario, hubo de emigrar, ya que su mujer era de ascendencia judía, y terminó aceptando un puesto en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, donde se unió a Albert Einstein y Kurt Gödel. Richard Courant fue apar-

tado de la enseñanza y acabó instalado en la Universidad de Nueva York. Bernays, por su parte, regresó a Suiza.

Hilbert quedó desconcertado por la nueva situación política en Alemania. En una ocasión le preguntó a Blumenthal, su primer alumno de doctorado, qué curso estaba impartiendo. Este le respondió que ya no se le permitía dar clases, y el anciano reaccionó con indignación. Cuando en un banquete le sentaron al lado del nuevo ministro nazi de Educación, este le preguntó: «¿Cómo va la matemática en Gotinga ahora que ha sido purgada de la influencia judía?». A lo que Hilbert contestó: «¿La matemática en Gotinga? ¡Pero si ya no hay!».

Con el advenimiento de la Segunda Guerra Mundial, los tiempos se volvieron aún más oscuros. Blumenthal emigró a los países Bajos, con tan mala suerte que, cuando los alemanes invadieron aquel país en 1940, se encontró atrapado. Murió ese mismo año en el tristemente famoso gueto de Theresiendstadt, en la actual República Checa. Felix Hausdorff, que había escrito el primer manual de teoría de conjuntos, se suicidó cuando se enteró de que él y su familia iban a ser deportados a un campo de concentración. Otros, como Banach, sobrevivieron alimentando piojos con su sangre en un instituto bacteriológico bajo dominio alemán que investigaba el control del tifus, pero sufrieron una degradación física irreparable.

David Hilbert murió en Gotinga el 14 de febrero de 1943, mientras las armas rugían con toda su fuerza. Al funeral de Hilbert asistió menos de una docena de personas. Y, sin embargo, aún resuenan las palabras grabadas en su tumba como epitafio: *Wir müssen wissen. Wir werden wissen* («Debemos saber, sabremos»).

Lecturas recomendadas

Almira, J.M. y Sabina de Lis, J.C., *Hilbert. Matemático fundamental*, Madrid, Nivola, 2007.

Bell, E.T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.

Boyer, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza, 1996.

Fresán, J., *El sueño de la razón. La lógica matemática y sus paradojas*, Barcelona, RBA, 2010.

Grattan-Guinness, I. (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos*, Madrid, Alianza, 1984.

Gray, J.J., *El reto de Hilbert*, Barcelona, Crítica, 2003.

Hilbert, D., *Fundamentos de las Matemáticas*, México D.F., UNAM, 1993.

Kline, M., *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Madrid, Siglo XXI, 1998.

Mancosu, P. (ed.), *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, 1998.

Mosterín, J., *Los lógicos*, Madrid, Espasa-Calpe, 2000.

Odifreddi, P., *La matemática del siglo xx*, Madrid, Katz Barpal Editores, 2006.

Reid, C., *Hilbert*, Nueva York, Springer Verlag, 1970.

Stewart, I., *Historia de las matemáticas*, Barcelona, Crítica, 2008.

Torretti, R., *El paraíso de Cantor*, Santiago de Chile, Editorial Universitaria, 1998.

Índice